6.3.2 二项式系数的性质

教材分析

本节课选自《2019 人教 A 版高中数学选择性必修第三册》，第六章《计数原理》，本节课主本节课主要学习二项式系数的性质

本节是在学习了二项式定理的基础上，探究二项式系数的性质。由于二项式系数组成的数列就是一个离散型函数，引导学生从函数的角度研究二项式系数的性质，便于建立知识前后联系，使学生运用利用几何直观、数形结合、特殊到一般的数学思想进行思考。

研究二项式系数这组特定的性质，对巩固二项式定理，建立知识间的联系，进一步认识组合数、进行组合数的计算和变形都有重要作用，对后续学习微分方程也具有重要地位。

教学目标与核心素养

课程目标	学科素养
A.能记住二项式系数的性质,并能灵活运用性质解决相关问题. B.会用赋值法求二项展开式系数的和,注意区分项的系数和二项式系数.	1.数学抽象：二项式系数的性质 2.逻辑推理：运用函数的观点讨论二项式系数的单调性 3.数学运算：运用二项式性质解决问题 4.几何直观：运用函数图像讨论二项式系数的性质

重点难点

重点： 二项式系数的性质（对称性、增减性与最大值和各二项式系数的和）；

难点：理解增减性与最大值时，根据 n 的奇偶性确定相应的分界点；

利用赋值法证明二项式系数的性质，数学思想方法的渗透.

课前准备

多媒体

教学过程

<table>
<tr><td>教学过程</td><td>教学设计意图
核心素养目标</td></tr>
<tr><td>

一、 温故知新

1．二项式定理

$(a+b)^n=$________________________ $(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)这个公式所表示的规律叫做二项式定理.

(2)展开式：等号右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式，展开式中一共有______项.

(3)二项式系数：各项的系数____ $(k\in\{0,1,2,\cdots,n\})$叫做二项式系数.

$C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n$

$n+1$ ； C_n^k

2．二项展开式的通项公式

$(a+b)^n$展开式的第______项叫做二项展开式的通项，记作 $T_{k+1}=$______.

$k+1$ ； $C_n^ka^{n-k}b^k$

二、 新知探究

探究 1：计算$(a+b)^n$展开式的二项式系数并填入下表

二项式系数:$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^0$.

通过计算、填表、你发现了什么规律？

<table>
<tr><td>n</td><td colspan="7">$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>通过回顾二项式定理，从数学知识内部提出问题，引导学生观察、发现二项式系数的性质。发展学生逻辑推理、数学运算、数学抽象和数学建模的核心素养。</td></tr>
</table>

6	1	6	15	20	15	6	1

将上表写成如下形式：

$(a+b)^1$ → 1 1

$(a+b)^2$ → 1 2 1

$(a+b)^3$ → 1 3 3 1

$(a+b)^4$ → 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ → 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6$ → 1 6 15 20 15 6 1

思考：通过上表和上图，能发现什么规律？

对于$(a+b)^n$展开式的二项式系数

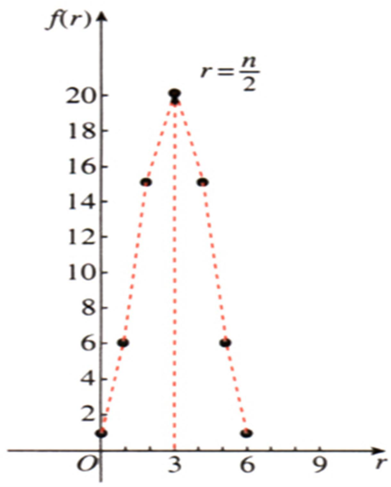
$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^0.$

我们还可以从函数的角度分析它们。C_n^r可看成是以r为自变量的函数$f(r)$，其定义域是$\{0,1,2,\ldots,n\}$

我们还可以画出它的图像。

例如，当$n=6$ 时，

函数$f(r)=C_n^r(r\epsilon\{0,1,2,\ldots,n\})$的图像是 7 个离散的点，如图所示。



1.对称性

与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等,即

让学生亲身经历了从特殊到一般，获得二项式性质的过程。发展学生逻辑推理，直观想象、数学抽象和数学运算的核心素养。

$C_n^m = C_n^{n-m}$.

2.增减性与最大值

当 $k<\frac{n+1}{2}$时,C_n^k随 k 的增加而增大;由对称性可知,当 $k>\frac{n+1}{2}$时,C_n^k随 k 的增加而减小.当 n 是偶数时,中间的一项$C_n^{\frac{n}{2}}$取得最大值;当 n 是奇数时,中间的两项$C_n^{\frac{n-1}{2}}$与$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等,且同时取得最大值.

探究 2. 已知$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n$

3.各二项式系数的和

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=\underline{2^n}$.

令 x=1 得$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$

所以,$(a+b)^n$ 的展开式的各二项式系数之和为2^n

1. 在$(a+b)^8$ 的展开式中,二项式系数最大的项为__________,在$(a+b)^9$ 的展开式中,二项式系数最大的项为________________.

解析:因为$(a+b)^8$ 的展开式中有 9 项,所以中间一项的二项式系数最大,该项为$C_8^4a^4b^4=70a^4b^4$.

因为$(a+b)^9$的展开式中有 10 项,所以中间两项的二项式系数最大,这两项分别为$C_9^4a^5b^4=126a^5b^4$,$C_9^5a^4b^5=126a^4b^5$.

答案:1.$70a^4b^4$ $126a^5b^4$ 与 $126a^4b^5$

2. $A=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots$与 $B=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$的大小关系是( )

A.$A>B$ B.$A=B$ C.$A<B$ D.不确定

解析:∵$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$,

$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$,

∴$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots=2^{n-1}$,即 $A=B$.

答案:B

三、典例解析

例 3.求证:在$(a+b)^n$ 的展开式中,奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

证明:在展开式

通过典例解析,让学生体会利用二项式系数的性质,感受数学模型在数学应用中的价值。发展学生逻辑推理,直观想象、数学抽象和数学运算的核心素养。

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n$中， 令 a=1,b=-1，得$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n$ 即$0=(C_n^0+C_n^2+\ldots)-(C_n^1+C_n^3+\ldots)$ 因此$C_n^0+C_n^2+\ldots=C_n^1+C_n^3+\ldots$ 即在$(a+b)^n$的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和. 二项展开式中系数和的求法 (1)对形如$(ax+b)^n$,$(ax^2+bx+c)^m$($a,b,c\in\mathbf{R},m,n\in\mathbf{N}^*$)的式子求其展开式的各项系数之和,常用赋值法,只需令 $x=1$ 即可;对$(ax+by)^n$($a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$)的式子求其展开式各项系数之和,只需令 $x=y=1$ 即可. (2)一般地,若$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$,则$f(x)$展开式中各项系数之和为$f(1)$, 奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\ldots=\frac{f(1)+f(-1)}{2}$, 偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\ldots=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$. 跟踪训练 **1.** 在$(2x-3y)^9$的展开式中,求: (1)二项式系数之和; (2)各项系数之和; (3)所有奇数项系数之和. 解:设$(2x-3y)^9=a_0x^9+a_1x^8y+a_2x^7y^2+\ldots+a_9y^9$. (1)二项式系数之和为$C_9^0+C_9^1+C_9^2+\ldots+C_9^9=2^9=512$. (2)各项系数之和为 $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_9$, 令 $x=1,y=1$, 所以 $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_9=(2-3)^9=-1$.	

(3)令 $x=1,y=-1$,可得

$a_0-a_1+a_2-\dots-a_9=5^9$,

又 $a_0+a_1+a_2+\dots+a_9=-1$,

将两式相加可得 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=\frac{5^9-1}{2}=976\ 562$,

即所有奇数项系数之和为 976 562.

例 4.已知$(1+2x)^n$的展开式中第 6 项与第 7 项的系数相等,求展开式中二项式系数最大的项和

系数最大的项.

解:$T_6=\mathrm{C}_n^5\cdot(2x)^5,T_7=\mathrm{C}_n^6\cdot(2x)^6$,依题意有

$\mathrm{C}_n^5\cdot 2^5=\mathrm{C}_n^6\cdot 2^6$,解得 $n=8$.

∴在$(1+2x)^8$的展开式中,二项式系数最大的项为

$T_5=\mathrm{C}_8^4\cdot(2x)^4=1\ 120x^4$.

设第 $k+1$ 项的系数最大,则有

$$\begin{cases}\mathrm{C}_8^k\cdot 2^k\geq \mathrm{C}_8^{k-1}\cdot 2^{k-1},\\ \mathrm{C}_8^k\cdot 2^k\geq \mathrm{C}_8^{k+1}\cdot 2^{k+1},\end{cases}$$

解得 $5\leq k\leq 6$.

∴$k=5$ 或 $k=6$(∵$k\in\{0,1,2,\dots,8\}$).

∴系数最大的项为 $T_6=1\ 792x^5,T_7=1\ 792x^6$.

求二项展开式中系数的最值的方法

(1)若二项展开式的系数的绝对值与对应二项式系数相等,可转化为确定二项式系数的最值来解决.

(2)若二项展开式的系数为$f(k)=\mathrm{C}_n^k\cdot m^{g(k)}$的形式.

如求$(a+bx)^n(a,b\in\mathbf{R})$的展开式中系数最大的项,一般是采用待定系数法,设其展开式的各项系数分别为 $A_1,A_2,\dots,A_{n+1}$,且第 $k+1$ 项系数最大,应用$\begin{cases}A_{k+1}\geq A_{k+2},\\ A_{k+1}\geq A_k\end{cases}$解出 k,即得系数最大的项.

跟踪训练 2.已知$\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^n$的展开式中,只有第 6 项的二项式系数最大.

(1)求该展开式中所有有理项的个数;

(2)求该展开式中系数最大的项.

解:(1)由题意可知$\frac{n}{2}+1=6$,

$\therefore n=10$.

$\therefore T_{k+1}=C_{10}^{k}x^{\frac{10-k}{2}}2^{k}x^{-2k}=C_{10}^{k}2^{k}x^{\frac{10-5k}{2}}$($0\le k\le 10$,且 $k\in\mathbf{N}$),要求该展开式中的有理项,只需令$\frac{10-5k}{2}\in\mathbf{Z}$.

$\therefore k=0,2,4,6,8,10$. $\therefore$有理项的个数为 6.

(2)设第 T_{k+1} 项的系数最大,

则$\begin{cases}C_{10}^{k}2^{k}\ge C_{10}^{k-1}2^{k-1},\\ C_{10}^{k}2^{k}\ge C_{10}^{k+1}2^{k+1},\end{cases}$ 即$\begin{cases}\frac{2}{k}\ge\frac{1}{11-k},\\ \frac{1}{10-k}\ge\frac{2}{k+1},\end{cases}$ 解不等式组得$\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}$.

$\because k\in\mathbf{N}$, $\therefore k=7$.

$\therefore$展开式中系数最大的项为 $T_8=C_{10}^{7}2^{7}x^{\frac{-25}{2}}=15\ 360x^{\frac{25}{2}}$.

三、达标检测

1.$(1-x)^{13}$ 的展开式中系数最小的项为(　　)

A.第 6 项　　B.第 7 项　　C.第 8 项　　D.第 9 项

解析:展开式中共有 14 项,中间两项(第 7,8 项)的二项式系数最大.故系数最小的项为第 8 项,系数最大的项为第 7 项.

答案:C

2.已知$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\dots+2^nC_n^n=729$,则$C_n^1+C_n^3+C_n^5$的值等于(　　)

A.64　　B.32　　C.63　　D.31

解析:由已知$(1+2)^n=3^n=729$,解得 $n=6$.

则$C_n^1+C_n^3+C_n^5=C_6^1+C_6^3+C_6^5=32$.

答案:B

3.已知$(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等,则奇数项的二项式系数和为(　　)

A.2^{12}　　B.2^{11}　　C.2^{10}　　D.2^{9}

解析:因为$(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等,

通过练习巩固本节所学知识，通过学生解决问题，发展学生的数学运算、逻辑推理、直观想象、数学建模的核心素养。

所以$C_n^3=C_n^7$,解得 n=10, 所以二项式$(1+x)^{10}$中奇数项的二项式系数和为$\frac{1}{2}\times2^{10}=2^9$. 答案:D **4**.已知$\left(\frac{1}{4}+2x\right)^n$的展开式中前三项的二项式系数的和等于 37,则展开式中二项式系数最大的项的系数为________. 解析:由$C_n^0+C_n^1+C_n^2=37$,得 $1+n+\frac{1}{2}n(n-1)=37$, 解得 $n=8$(负值舍去), 则第 5 项的二项式系数最大, $T_5=C_8^4\times\frac{1}{4^4}\times(2x)^4=\frac{35}{8}x^4$,该项的系数为$\frac{35}{8}$. 答案:$\frac{35}{8}$ **5**.已知$\left(\frac{1}{2}+2x\right)^n$,若展开式中第 5 项、第 6 项与第 7 项的二项式系数成等差数列,求展开式中二项式系数最大的项的系数. 解: ∵$C_n^4+C_n^6=2C_n^5$, ∴$n=7$ 或 $n=14$, 当 $n=7$ 时,展开式中二项式系数最大的项是 T_4 和 T_5, T_4的系数为$C_7^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times2^3=\frac{35}{2}$,$T_5$的系数为$C_7^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times2^4=70$; 当 $n=14$ 时,展开式中二项式系数最大项是 T_8,T_8的系数为 $C_{14}^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times2^7=3\ 432$.	
四、小结 二项式系数的性质 　├ 二项展开式中项的系数与二项式系数问题 　└ 二项式系数和的问题 五、课时练	通过总结，让学生进一步巩固本节所学内容，提高概括能力。

教学反思

本节课需要学生探究的内容比较多，由于学生的数学基础比较薄弱，所以在教学过程中教师不仅要耐心的指导，还要努力创设一个轻松和谐的课堂氛围，让每个学生都能大胆的说出自己的想法，保证每个学生都能学有所得。为了让每个学生在课上都能有话说，还需要学生做到课前预习，并且教师要给学生提出明确的预习目标。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来