

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

教材分析

三个“二次”即一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是高中数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，同时也是研究包含二次曲线在内的许多内容的工具。高考试题中近一半的试题与这三个“二次”问题有关。本节主要是帮助考生理解三者之间的区别及联系，掌握函数、方程及不等式的思想和方法。

教学目标与核心素养

课程目标

1. 通过探索，使学生理解二次函数与一元二次方程，一元二次不等式之间的联系。
2. 使学生能够运用二次函数及其图像，性质解决实际问题。
3. 渗透数形结合思想，进一步培养学生综合解题能力。

数学学科素养

1. 数学抽象：一元二次函数与一元二次方程，一元二次不等式之间的联系；
2. 逻辑推理：一元二次不等式恒成立问题；
3. 数学运算：解一元二次不等式；
4. 数据分析：一元二次不等式解决实际问题；
5. 数学建模：运用数形结合的思想，逐步渗透一元二次函数与一元二次方程，一元二次不等式之间的联系。

教学重难点

重点：一元二次函数与一元二次方程的关系，利用二次函数图像求一元二次方程的实数根和不等式的解集；

难点：一元二次方程根的情况与二次函数图像与 x 轴位置关系的联系，数形结合思想的运用。

课前准备

教学方法：以学生为主体，采用诱思探究式教学，精讲多练。

教学工具：多媒体。

教学过程

一、情景导入

在初中，我们从一次函数的角度看一元一次方程、一元一次不等式，发现了三者之间的内在联系，利用这种联系可以更好地解决相关问题。类似地，能否从二次函数的观点看一元二次方程和一元二次不等式，

进而得到一元二次不等式的求解方法呢？

要求：让学生自由发言，教师不做判断。而是引导学生进一步观察、研探。

二、预习课本，引入新课

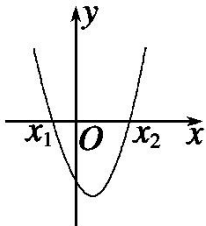
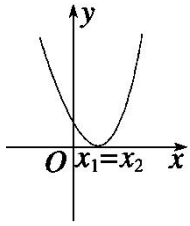
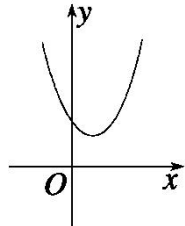
阅读课本 50-52 页，思考并完成以下问题

1. 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系。
2. 解一元二次不等式的步骤？

要求：学生独立完成，以小组为单位，组内可商量，最终选出代表回答问题。

三、新知探究

1. 一元二次不等式与相应的一元二次函数及一元二次方程的关系如下表：

| 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ | $\Delta > 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta < 0$ |
|---|--|---|---|
| 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象 |  |  |  |
| 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根 | 有两相异实根 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) | 有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ | 没有实数根 |
| $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集 | $\{x x > x_2 \text{ 或 } x < x_1\}$ | $\{x x \neq -\frac{2b}{a}\}$ | R |
| $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集 | $\{x x_1 < x < x_2\}$ | \emptyset | \emptyset |

2 一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的求解的算法。

四、典例分析、举一反三

题型一 解不等式

例 1 求下列不等式的解集

(1) $x^2 - 5x + 6 > 0$ (2) $9x^2 - 6x + 1 > 0$ (3) $-x^2 + 2x - 3 > 0$

【答案】 (1) $\{x | x < 2, \text{ 或 } x > 3\}$ (2) $\{x | x \neq \frac{1}{3}\}$ (3) \emptyset

解题方法 (解不等式)

(1) 解 $ax^2 + bx + c = 0$; (2) 判断开口方向; (3) 根据开口方向和两根画草图;

(4) 不等式 > 0 , 看草图上方, 写对应 x 的结果;

不等式 < 0 , 看草图下方, 写对应 x 的结果;

跟踪训练一

1、求下列不等式的解集

(1) $(x+2)(x-3) > 0$; (2) $3x^2 - 7x \leq 10$; (3) $-x^2 + 4x - 4 < 0$ (4) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

【答案】 (1) $\{x|x < -2, \text{或} x > 3\}$ (2) $\{x|x \leq -3, \text{或} x \geq \frac{10}{3}\}$
 (3) $\{x|x \neq 2\}$ (4) $\{x|x = \frac{1}{2}\}$

题型二 一元二次不等式恒成立问题

例 2 (1). 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 -2 和 3 且 $a < 0$, 那么不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 _____.

(2). 已知关于 x 的不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 ()
 A. $0 \leq k \leq 1$ B. $0 < k \leq 1$ C. $k < 0$ 或 $k > 1$ D. $k \leq 0$ 或 $k > 1$

【答案】 (1) $\{x|-2 < x < 3\}$ (2) A

【解析】 (1) 由韦达定理得 $\begin{cases} -\frac{b}{a} = -2 + 3 = 1 \\ \frac{c}{a} = -2 \times 3 = -6 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} b = -a \\ c = -6a \end{cases}$, 代入不等式 $ax^2 + bx + c > 0$,

得 $ax^2 - ax - 6a > 0$, $\because a < 0$, 消去 a 得 $x^2 - x - 6 < 0$, 解该不等式得 $-2 < x < 3$,

因此, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x|-2 < x < 3\}$, 故答案为: $\{x|-2 < x < 3\}$.

(2) 当 $k = 0$ 时, 不等式为 $8 \geq 0$ 恒成立, 符合题意;

当 $k > 0$ 时, 若不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

则 $\Delta = 36k^2 - 4k(k+8) \leq 0$, 解得 $0 < k \leq 1$;

当 $k < 0$ 时, 不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 不能对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立。

综上, k 的取值范围是 $0 \leq k \leq 1$.

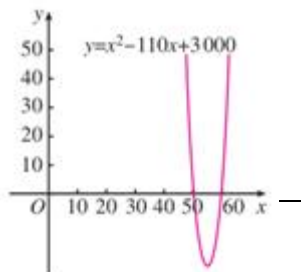
解题方法 (一元二次不等式恒成立问题)

1、恒大于零就是相应的二次函数的图像在给定的区间上全部在 x 轴上方, 恒小于零就是相应的二次函数的图像在给定的区间上全部在 x 轴下方, 从而确定 Δ 的取值范围, 进而求参数. (若二次项系数带参数, 考虑参数等于零、不等于零)

2、解决恒成立问题, 一定要搞清谁是主元, 谁是参数, 一般地, 知道谁的范围, 谁就是主元, 求谁的范围, 谁就是参数.

跟踪训练二

1. 已知不等式 $x^2 - x - a > 0$ 的解集为 $\{x|x > 3 \text{ 或 } x < -2\}$, 则实数 $a =$ _____.



2. 对任意实数 x ，不等式 $(a-3)x^2 - 2(a-3)x - 6 < 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】1、6 2、 $-3 < a < 3$

【解析】1、由题意可知 $-2, 3$ 为方程 $x^2 - x - a = 0$ 的两根，则 $-2 \times 3 = -a$ ，即 $a = 6$. 故答案为：6

2、①当 $a-3 = 0$ ，即 $a = 3$ 时，不等式为： $-6 < 0$ ，恒成立，则 $a = 3$ 满足题意

②当 $a-3 \neq 0$ ，即 $a \neq 3$ 时，不等式恒成立则需：

$$\begin{cases} a-3 < 0 \\ \Delta = 4(a-3)^2 - 4(a-3) \times (-6) < 0 \end{cases}, \text{解得: } -3 < a < 3 \text{ 综上所述: } -3 < a \leq 3$$

题型三 一元二次不等式的实际应用问题

例3 一家车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量 x （单位：辆）与创造的价值 y （单位：元）之间有如下的关系：

$$y = -2x^2 + 220x.$$

若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收 6000 元以上，则在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车？

【答案】见解析

【解析】设这家工厂在一个星期内大约应该利用这条流水线生产 x 辆摩托车，根据题意，得 $-2x^2 + 220x > 6000$. 移项整理，得 $x^2 - 110x + 3000 < 0$

对于方程 $x^2 - 110x + 3000 = 0$ ， $\Delta = 100 > 0$ ，方程有两个实数根 $x_1 = 50$ ， $x_2 = 60$.

画出二次函数 $y = x^2 - 110x + 3000$ 的图像，结合图象得不等式 $x^2 - 110x + 3000 < 0$ 的解集为 $\{x | 50 < x < 60\}$ ，从而原不等式的解集为 $\{x | 50 < x < 60\}$.

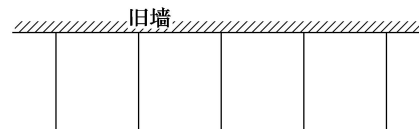
因为 x 只能取整数值，所以当这条流水线在一周内生产的摩托车数量在 51~59 辆时，这家工厂能够获得 6000 元以上的收益.

解题方法（一元二次不等式实际应用问题）

- (1) 根据题意列出相应的一元二次函数；
- (2) 由题意列出相应一元二次不等式；
- (3) 求出解集；
- (4) 结合实际情况写出最终结果.

跟踪训练三

1. 用可围成 32 m 墙的砖头，沿一面旧墙(旧墙足够长)围成猪舍四间(面积大小相等的长方形). 应如何围才能使猪舍的总面积最大? 最大面积是多少?



【答案】当长方形一边(垂直于旧墙)为 $\frac{16}{5}$ m，另一边为 4 m 时猪舍面积最大，最大值为 $\frac{256}{5} m^2$.

【解析】设长方形的一边(垂直于旧墙)长为 x m，则另一边长为 $\left(\frac{32-5x}{4}\right)$ m，总面积

$$S = x(32 - 5x) = -5x^2 + 32x, \quad 0 < x < \frac{32}{5}, \quad \text{当 } x = \frac{16}{5} \text{ m 时, } S_{\max} = \frac{256}{5} (m^2).$$

答：当长方形一边(垂直于旧墙)为 $\frac{16}{5}$ m，另一边为 4 m 时猪舍面积最大，最大值为 $\frac{256}{5} m^2$.

五、课堂小结

让学生总结本节课所学主要知识及解题技巧

六、板书设计

| | | | |
|---------------------|-----|-----|-----|
| 2.3 二次函数与一元二次方程、不等式 | | | |
| 1.三个二次关系 | 例 1 | 例 2 | 例 3 |
| 2.解一元二次不等式 | | | |

七、作业课本 55 页习题 2.3

教学反思

本节通过画图，看图，分析图，小组讨论列出表格深化知识，抽象概括进行教学，让每个学生动手，动口，动脑，积极参与，提高教学效率和教学质量，使学生进一步理解数形结合和从特殊到一般的思想方法。