1.5 全称量词与存在量词（人教 A 版）

教材分析

本节内容比较抽象，首先从命题出发，分清命题的条件和结论，然后看条件的特征得出全称量词命题及存在量词命题，从而判断命题的真假；然后归纳总结出含有一个量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律.

教学目标与核心素养

课程目标

1. 理解全称量词与存在量词的含义,熟悉常见的全称量词和存在量词.

2. 了解含有量词的全称命题和特称命题的含义,并能用数学符号表示含有量词的命题及判断命题的真假性.

3. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定,理解全称命题与特称命题之间的关系.

数学学科素养

1. 数学抽象：全称量词命题、存在量词命题与全称量词命题的否定与存在量词命题的否定的理解；

2. 逻辑推理：通过实例得出全称量词命题、存在量词命题含义，并通过两者的联系与区别得出全称量词命题与存在量词命题的否定；

3. 数学运算：关于命题真假的判断；

4. 数据分析：含有一个量词的命题的否定；

5. 数学建模：通过对全称量词命题、存在量词命题概念的理解和运用，培养学生分析、判断和归纳的逻辑思维能力。

教学重难点

重点：通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词和存在量词的意义，能正确地对含有一个量词的命题进行否定.

难点：全称命题和特称命题的真假的判定，以及写出含有一个量词的命题的否定.

课前准备

教学方法：以学生为主体，采用诱思探究式教学，精讲多练。

教学工具：多媒体。

教学过程

一、 问题导入：

下列语句是命题吗？假如是命题你能判断它的真假吗？

(1) 2x＋1 是整数; (2) x＞3;

(3) 对所有的 $x \in R, x > 3$; (4) 对任意一个 $x \in Z, 2x+1$ 是整数.

(5) 至少有一个 $x \in z, x$ 能被 2 和 3 整除; (6) 存在有一个 $x \in R$, 使 $2x+1=3$

要求：让学生自由发言，教师不做判断。而是引导学生进一步观察.研探.

二、 预习课本，引入新课

阅读课本 24-29 页，思考并完成以下问题

1.什么是全称量词？常见的全称量词有哪些？怎样表示全称量词命题？

2.什么是存在量词？常见的存在量词有哪些？怎样表示存在量词命题？

3.什么是命题的否定？4.怎样表示全称量词命题的否定？

5.怎样表示存在量词命题的否定？

要求：学生独立完成，以小组为单位，组内可商量，最终选出代表回答问题，教师巡视指导，解答学生在自主学习中遇到的困惑过程。

三、新知探究，知识梳理

1.全称量词与全称命题

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词,并用符号“$\forall$”表示.

(2)含有全称量词的命题,叫做全称量词命题.

(3)全称量词命题的表述形式:对 M 中任意一个 x,有 p(x)成立,可简记为:$\forall x\in M, p(x)$,读作“对任意 x 属于 M,有 p(x)成立”.

(4)全称量词命题的真假判断:要判断一个全称命题量词是真命题,必须对限定集合 M 中的每一个元素 x,验证 p(x)成立;但要判断一个全称量词命题是假命题,只需列举出一个 $x_0 \in M$,使得 $p(x_0)$不成立即可.

2.存在量词与存在量词命题

(1)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词,并用符号“$\exists$”表示.

(2)含有存在量词的命题,叫做存在量词命题.

(3)存在量词命题的表述形式:存在 M 中的一个 x_0,使 $p(x_0)$成立,可简记为:$\exists x_0 \in M, p(x_0)$,读作“存在 M 中的元素 x_0,使 $p(x_0)$成立”.

(4)存在量词命题的真假判断:要判断一个存在量词命题是真命题,只要在限定集合 M 中,能找到一个 x_0,使得命题 $p(x_0)$成立即可;否则这一命题就是假命题.

3.全称命题与特称命题的否定

命题类型	全称量词命题	存在量词命题
形式	$\forall x\in M, p(x)$	$\exists x_0 \in M, p(x_0)$
否定	$\exists x_0 \in M, p(x_0)$	$\forall x\in M, p(x)$
结论	全称量词命题的否定是存在量词命题	存在量词命题的否定是全称量词命题

4.点拨:

（1）常用的全称量词还有“所有”“每一个”“任何”“任意”“一切”“任给”“全部”.只要含有这些量词,或者命题具有全称量词所表达的含义,就是全称量词命题.

（2）常用的存在量词还有"有些"、"有一个"、"存在"、"某个"、"有的"等.只要含有这些量词,或者命题具有特称量词所表达的含义,就是存在量词命题.

（3）写出一个全称量词命题或存在量词命题的否定时,通常要将命题的两个地方进行改变,一是量词符号要改变,二是结论要进行否定.

（4）全称量词命题(或存在量词命题)与其否定的真假性恰好相反.

四、典例分析、举一反三

题型一 全称量词命题与存在量词命题的辨析

例 1　判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题:

(1)负数没有对数;(2)至少有一个整数,它既能被 2 整除,又能被 5 整除;

(3)$\forall x\in\{x|x$ 是无理数$\}$, x^2 是无理数;(4) $\exists x\in\{y|y$ 是无理数$\}$, x^2 是无理数.

【答案】(1)和(3)为全称量词命题;(2)和(4)为存在量词命题.

解题技巧:(判断一个命题是全称量词命题还是存在量词命题的方法)

(1)分析命题中所含的量词,含有全称量词的命题是全称量词命题,含有存在量词的命题是存在量词命题.

(2)当命题中不含量词时,要注意根据命题的含义进行判断.

(3)全称量词命题有时会省略全称量词,但存在量词命题的量词一般不能省略.

跟踪训练一

1.下列命题中,是全称量词命题的是_____,是存在量词命题的是_______.(填序号)

①正方形的四条边相等;②有两个角是 45° 的三角形是等腰直角三角形;③正数的平方根不等于 0;④至少有一个正整数是偶数.

【答案】①②③　　　　④

题型二　　全称量词命题与存在量词命题的真假判断

例 2　判断下列命题的真假

1.所有的素数都是奇数;2. $\forall x\in R,|x|+1\geq 1$;3.有一个实数 x，使 $x^2+2x+3=0$;

4.平面内存在两条相交直线垂直于同一条直线。

【答案】真命题：2,4　　　　假命题：1,3

解题技巧:(全称量词命题与存在量词命题真假的判断技巧)

(1)全称量词命题:要判定一个全称量词命题是真命题,必须对限定集合 M 中的每个元素 x 验证 p(x)成立;但要判定全称量词 命题是假命题,只要能举出集合 M 中的一个 x=x0,使得 p(x0)不成立即可.

(2)存在量词命题:要判定一个存在量词命题是真命题,只要在限定集合 M 中,找到一个 x=x0,使 p(x0)成立即可;否则,这一存在量词命题就是假命题.

跟踪训练二

2．给出下列命题:①有一个实数 x,使 $\tan x$ 无意义;②$\forall x\in R$, $3^{-x}+1>2$;③所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径.其中真命题的个数是(　　)

A.1　　　B.2　　　C.3　　　D.0

【答案】 B

题型三　　全称量词命题与存在量词命题的否定

例 3　写出下列命题的否定,并判断其真假:

(1)有些质数是奇数(2)菱形的对角线互相垂直;(4)不论 m 取何实数,方程 x2+2x-m=0 都有实数根.

(3)$\exists x_0\in \mathbf{N}, x_0^2-2x_0+1<0$;

【答案】见解析

【解析】(1)“有些质数是奇数”是存在量词命题,其否定为“所有质数都不是奇数”,它是假命题.

(2)“菱形的对角线互相垂直”是全称量词命题,其否定为“有的菱形的对角线不垂直”,它是假命题.

(3)"$\exists x_0\in N, x_0^2-2x_0+1<0$"是存在量词命题，其否定为"$\forall x\in N, x_0^2-2x_0+1\geq 0$"，它是真命题。

(4)“不论 m 取何实数,方程 x2+2x-m=0 都有实数根”是全称量词命题,其否定为“存在实数 m0,使得方程 x2+2x-m0=0 没有实数根”,它是真命题.

解题技巧:(含有一个量词的命题的否定方法)

(1)一般地,写含有一个量词的命题的否定,首先要明确这个命题是全称量词命题还是存在量词命题,并找到其量词的位置及相应结论,然后把命题中的全称量词改成存在量词,存在量词改成全称量词,同时否定结论.

(2)对于省略量词的命题,应先挖掘命题中隐含的量词,改写成含量词的完整形式,再依据规则来写出命题的否定.

跟踪训练三

3．写出下列命题的否定,并判断其真假:

(1) p: $\forall x\in R$, $x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$; (2) q: 所有的正方形都是矩形;

(3) r: $\exists x\in R$, $x^2+3x+7\leqslant 0$; (4) s: 至少有一个实数 x, 使 $x^3+1=0$.

【答案】见解析

【解析】(1) $\neg p$: $\exists x\in R$, $x^2-x+\frac{1}{4}<0$. $\because\forall x\in R$, $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立, $\therefore\neg p$ 是假命题.

(2) $\neg q$: 至少存在一个正方形不是矩形, 是假命题.

(3) $\neg r$: $\forall x\in R$, $x^2+3x+7>0$. $\because\forall x\in R$, $x^2+3x+7=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0$ 恒成立, $\therefore\neg r$ 是真命题.

(4) $\neg s$: $\forall x\in R$, $x^3+1\neq 0$. $\because$当 $x=-1$ 时, $x^3+1=0$, $\therefore\neg s$ 是假命题.

五、课堂小结

让学生总结本节课所学主要知识及解题技巧

六、板书设计

1.5 全称量词与存在量词		
1. 全称量词命题与存在量词命题	例 1	例 3
2. 含一个量词的命题的否定	例 2	
2.必要条件		
3.充要条件		

七、作业

课本 29 页习题 1.5

教学反思

因为涉及到的知识点比较多，且知识点较繁琐，且新概念比较抽象，因此本节学习过程中，一定让学生多多参加，并且在解题技巧方面先让学生自己总结，教师再补充说明。