

2.5.2 圆与圆的位置关系

【学习目标】

课程标准	学科素养
1.理解圆与圆的位置关系的种类. 2.掌握圆与圆的位置关系的代数判断方法与几何判断方法,能够利用上述方法判断两圆的位置关系. 3.体会根据圆的对称性灵活处理问题的方法和它的优越性.	1、直观想象 2、数学运算 3、逻辑推理

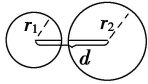
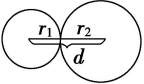
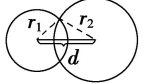
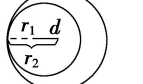
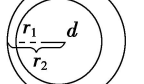
【自主学习】

1. 圆与圆的位置关系

两圆相交		有____公共点
两圆相切	____和____	____公共点
两圆相离	____和____	____公共点

2.圆与圆位置关系的判定

(1)几何法：若两圆的半径分别为 r_1 , r_2 , 两圆的圆心距为 d , 则两圆的位置关系的判断方法如下：

位置关系	外离	外切	相交	内切	内含
图示					
d 与 r_1 , r_2 的关系	_____	_____	_____	_____	_____

(2)代数法：通过两圆方程组成方程组的公共解的个数进行判断.

$$\left. \begin{array}{l} \text{圆 } C_1 \text{ 方程} \\ \text{圆 } C_2 \text{ 方程} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{消元}} \text{一元二次方程} \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{相交,} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{内切或外切,} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{外离或内含.} \end{cases}$$

思考：将两个相交的非同心圆的方程 $x^2 + y^2 + D_i x + E_i y + F_i = 0 (i=1,2)$ 相减，可得一直线方程，这条直线方程具有什么样的特殊性呢？



【小试牛刀】

1. 思考辨析(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)若直线与圆有公共点，则直线与圆相交. ()

(2)若两圆没有公共点，则两圆一定外离. ()

(3)从两圆的方程中消掉二次项后得到的二元一次方程是两圆的公共弦所在的直线方程.()

(4)若两圆有公共点，则 $|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2$. ()

2. 圆 $O_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$ 和圆 $O_2: x^2 + y^2 - 4y = 0$ 的位置关系为()

A. 相离 B. 相交 C. 外切 D. 内切

【经典例题】

题型一 两圆的位置关系

判断两圆的位置关系的两种方法

(1)几何法：将两圆的圆心距 d 与两圆的半径之差的绝对值，半径之和进行比较，进而判断出两圆的位置关系，这是在解析几何中主要使用的方法.

(2)代数法：将两圆的方程组成方程组，通过解方程组，根据方程组解的个数进而判断两圆位置关系.

例 1 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 - 15 = 0$ ，圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4ax - 2y + 4a^2 = 0 (a > 0)$. 试求 a 为何值时，两圆 C_1, C_2 的位置关系为：

(1)相切；(2)相交；(3)外离；(4)内含.

[跟踪训练]1 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ 和圆 $C_2: 4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y + 19 = 0$ ，则这两个圆的公切线的条数为()

A.1 或 3 B.4 C.0 D.2

题型二 两圆的公共弦问题

1. 求两圆公共弦长的方法

一是联立两圆方程求出交点坐标，再用距离公式求解；

二是先求出两圆公共弦所在的直线方程，再利用半径长、弦心距和弦长的一半构成的直角三角形求解.



2. 过两圆的交点的圆的方程

已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 相交，则过两圆交点的圆的方程可设为 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0 (\lambda \neq -1)$.

例 2 已知两圆 $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 24 = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$.

(1) 判断两圆的位置关系；

(2) 求公共弦所在的直线方程；

(3) 求公共弦的长度.

[跟踪训练] 2 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的公共弦所在的直线被圆 $C_3: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{25}{4}$ 所截得的弦长为_____.

题型三 两圆相切

处理两圆相切问题的两个步骤

(1) 定性，即必须准确把握是内切还是外切，若只是告诉相切，则必须分两圆内切还是外切两种情况讨论.

(2) 转化思想，即将两圆相切的问题转化为两圆的圆心距等于两圆半径之差的绝对值(内切时)或两圆半径之和(外切时).

例 3 求半径为 4，与圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 相切，且和直线 $y=0$ 相切的圆的方程.



[跟踪训练]3 求与圆 $x^2+y^2-2x=0$ 外切且与直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 相切于点 $M(3, -\sqrt{3})$ 的圆的方程.

【当堂达标】

1. 已知两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-6x-8y+9=0$, 那么这两个圆的位置关系是()
A. 相离 B. 相交 C. 外切 D. 内切
2. 若圆 $x^2+y^2-2x+F=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x+Ey-4=0$ 的公共弦所在的直线方程是 $x-y+1=0$, 则()
A. $E=-4, F=8$ B. $E=4, F=-8$
C. $E=-4, F=-8$ D. $E=4, F=8$
3. 已知圆 $C_1: (x-1)^2+(y-2)^2=4$, 圆 $C_2: (x+2)^2+(y+2)^2=9$, 则两圆的公切线条数是_____.
4. 已知两圆 $x^2+y^2=10$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=10$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是_____.
5. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$ 的公共弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$ _____.
6. 已知点 P 在圆 $O: x^2+y^2=1$ 上运动, 点 Q 在圆 $C: (x-3)^2+y^2=1$ 上运动, 则 $|PQ|$ 的最小值为_____.
7. 已知圆 $C_1: x^2+y^2-2mx+4y+m^2-5=0$, 圆 $C_2: x^2+y^2+2x-2my+m^2-3=0$, 当 m 为何值时, 分别满足下列情况:
(1) 圆 C_1 与圆 C_2 外切;
(2) 圆 C_1 与圆 C_2 内含.
8. 已知以 $C(4, -3)$ 为圆心的圆与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相切, 求圆 C 的方程.



【参考答案】

【自主学习】

外切 内切 外离 内含 两个 只有一个 没有

$$d > r_1 + r_2 \quad d = r_1 + r_2 \quad |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \quad d = |r_1 - r_2| \quad 0 < d < |r_1 - r_2|$$

思考：两圆相减得一直线方程，它经过两圆的公共点．经过相交两圆的公共交点的直线是两圆的公共弦所在的直线．

【小试牛刀】

1. (1)× (2)× (3)× (4)√

2. B [圆 O_1 的圆心坐标为(1,0)，半径长 $r_1=1$ ；圆 O_2 的圆心坐标为(0,2)，半径长 $r_2=2$ ； $1=r_2 - r_1 < |O_1O_2| = \sqrt{5} < r_1 + r_2 = 3$ ，即两圆相交.]

【经典例题】

例 1 [解]圆 C_1, C_2 的方程，经配方后可得 $C_1: (x-a)^2 + (y-1)^2 = 16$, $C_2: (x-2a)^2 + (y-1)^2 = 1$,
 $\therefore$ 圆心 $C_1(a,1)$, $C_2(2a,1)$, 半径 $r_1=4$, $r_2=1$. $\therefore |C_1C_2| = \sqrt{(a-2a)^2 + (1-1)^2} = a$.

(1)当 $|C_1C_2| = r_1 + r_2 = 5$ ，即 $a=5$ 时，两圆外切；

当 $|C_1C_2| = r_1 - r_2 = 3$ ，即 $a=3$ 时，两圆内切．

(2)当 $3 < |C_1C_2| < 5$ ，即 $3 < a < 5$ 时，两圆相交．

(3)当 $|C_1C_2| > 5$ ，即 $a > 5$ 时，两圆外离．(4)当 $|C_1C_2| < 3$ ，即 $a < 3$ 时，两圆内含．

[跟踪训练]1 D 解析 对两个圆的方程配方得圆 $C_1: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ 及圆 $C_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$ ，则圆心距 $d = |C_1C_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $1 - \frac{1}{2} < \sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2}$ ，故两个圆相交，则这两个圆的公切线有 2 条．

例 2 解 (1)将两圆方程配方化为标准方程，则 $C_1: (x-1)^2 + (y+5)^2 = 50$, $C_2: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$, $\therefore$ 圆 C_1 的圆心坐标为(1, -5)，半径为 $r_1=5\sqrt{2}$ ，

圆 C_2 的圆心坐标为(-1, -1)，半径为 $r_2=\sqrt{10}$ ．

$$\therefore |C_1C_2| = 2\sqrt{5}, r_1 + r_2 = 5\sqrt{2} + \sqrt{10}, |r_1 - r_2| = |5\sqrt{2} - \sqrt{10}|,$$

$$\therefore |r_1 - r_2| < |C_1C_2| < r_1 + r_2, \therefore \text{两圆相交}.$$

(2)将两圆方程相减，得公共弦所在的直线方程为 $x-2y+4=0$ ．

$$(3) \text{方法一由(2)知圆 } C_1 \text{ 的圆心}(1, -5) \text{ 到直线 } x-2y+4=0 \text{ 的距离为 } d = \frac{|1-2 \times (-5)+4|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = 3\sqrt{5},$$



$$\therefore \text{公共弦长为 } l = 2\sqrt{r_1^2 - d^2} = 2\sqrt{50 - 45} = 2\sqrt{5}.$$

方法二 设两圆相交于点 A, B , 则 A, B 两点满足方程组

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -4, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \end{cases}$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5}. \text{即公共弦长为 } 2\sqrt{5}.$$

[跟踪训练]2 $\sqrt{23}$ 解析 由题意将两圆的方程相减, 可得圆 C_1 和圆 C_2 公共弦所在的直线 l

$$\text{的方程为 } x + y - 1 = 0. \text{又圆 } C_3 \text{ 的圆心坐标为 } (1, 1), \text{ 其到直线 } l \text{ 的距离为 } d = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{设圆 } C_3 \text{ 的半径为 } r, \text{ 由条件知, } r^2 - d^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}, \text{ 所以弦长为 } 2 \times \frac{\sqrt{23}}{2} = \sqrt{23}.$$

例 3 [解] 设所求圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$,

由圆与直线 $y=0$ 相切、半径为 4, 则圆心 C 的坐标为 $C_1(a, 4)$ 或 $C_2(a, -4)$.

已知圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 的圆心 A 的坐标为 $(2, 1)$, 半径为 3.

由两圆相切, 则 $|CA| = 4 + 3 = 7$ 或 $|CA| = 4 - 3 = 1$.

①当圆心为 $C_1(a, 4)$ 时, $(a-2)^2 + (4-1)^2 = 7^2$ 或 $(a-2)^2 + (4-1)^2 = 1^2$ (无解),

故可得 $a = 2 \pm 2\sqrt{10}$, 故所求圆的方程为 $(x-2-2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$ 或 $(x-2+2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$.

②当圆心为 $C_2(a, -4)$ 时,

$$(a-2)^2 + (-4-1)^2 = 7^2 \text{ 或 } (a-2)^2 + (-4-1)^2 = 1^2 \text{ (无解), 解得 } a = 2 \pm 2\sqrt{6}.$$

$$\text{故所求圆的方程为 } (x-2-2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16 \text{ 或 } (x-2+2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16.$$

综上所述, 所求圆的方程为 $(x-2-2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$ 或 $(x-2+2\sqrt{10})^2 + (y-4)^2 = 16$ 或 $(x-2-2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$ 或 $(x-2+2\sqrt{6})^2 + (y+4)^2 = 16$.

[跟踪训练]3 [解] 已知圆的方程可化为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则圆心为 $C(1, 0)$, 半径为 1.

设所求圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$.

$$\text{由题意, 可得} \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = r + 1, \\ \frac{b + \sqrt{3}}{a-3} \times \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} \right] = -1, \\ \frac{|a + \sqrt{3}b|}{2} = r, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 4, \\ b = 0, \\ r = 2 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} a = 0, \\ b = -4\sqrt{3}, \\ r = 6, \end{cases}$$

即所求圆的方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 或 $x^2 + (y+4\sqrt{3})^2 = 36$.



【当堂达标】

1. C

$$2. \text{ C 解析 } \begin{cases} x^2+y^2-2x+F=0, & \text{①} \\ x^2+y^2+2x+Ey-4=0, & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①}-\text{②} \text{ 可得 } 4x+Ey-F-4=0, \text{ 即 } x+\frac{E}{4}y-\frac{F+4}{4}=0,$$

$$\text{由两圆的公共弦所在的直线方程为 } x-y+1=0, \text{ 得 } \begin{cases} \frac{E}{4}=-1, \\ -\frac{F+4}{4}=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} E=-4, \\ F=-8. \end{cases}$$

3. 3 $[C_1(1,2), r_1=2; C_2(-2, -2), r_2=3, |C_1C_2|=5, r_1+r_2=5, \text{ 因此两圆外切. 所以公切线有 3 条.}]$

$$4. x+3y-5=0 \text{ [由两圆方程消去二次项得 } 10-2x+1-6y+9=10, \text{ 即 } x+3y-5=0.]$$

$$5. \text{ 1 解析 将两圆的方程相减, 得相交弦所在的直线方程为 } y=\frac{1}{a}, \text{ 圆心}(0,0)\text{到直线的距离为}$$

$$d=\frac{1}{a}=\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1, \text{ 所以 } a=1$$

$$6. 1 \text{ [} O(0,0), C(3,0), \text{ 两圆半径均为 1, } \because |OC|=\sqrt{3^2+0^2}=3, \therefore |PQ|\text{的最小值为 } 3-1-1=1.]$$

$$7. \text{ 解 易得圆 } C_1: (x-m)^2+(y+2)^2=9, \text{ 圆 } C_2: (x+1)^2+(y-m)^2=4.$$

$$(1) \text{ 如果圆 } C_1 \text{ 与圆 } C_2 \text{ 外切, 则 } \sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2}=3+2,$$

$$\text{所以 } m^2+3m-10=0, \text{ 解得 } m=2 \text{ 或 } m=-5.$$

$$(2) \text{ 如果圆 } C_1 \text{ 与圆 } C_2 \text{ 内含, 则 } \sqrt{(m+1)^2+(m+2)^2}<3-2,$$

$$\text{所以 } m^2+3m+2<0, \text{ 解得 } -2<m<-1.$$

$$8. [\text{解}] \text{ 设圆 } C \text{ 的半径为 } r, \text{ 圆心距为 } d=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=5,$$

$$\text{当圆 } C \text{ 与圆 } O \text{ 外切时, } r+1=5, r=4,$$

$$\text{当圆 } C \text{ 与圆 } O \text{ 内切时, } r-1=5, r=6,$$

$$\therefore \text{圆的方程为 } (x-4)^2+(y+3)^2=16 \text{ 或 } (x-4)^2+(y+3)^2=36.$$

