1.4 充分条件与必要条件
教学设计（人教 A 版）

教材分析

本节内容比较抽象，首先从命题出发，分清命题的条件和结论，看条件能否推出结论，从而判断命题的真假；然后从命题出发结合实例引出充分条件、必要条件、充要条件这三个概念，再详细讲述概念，最后再应用概念进行论证.

教学目标与核心素养

课程目标

1．理解充分条件、必要条件与充要条件的意义.

2．结合具体命题掌握判断充分条件、必要条件、充要条件的方法.

3．能够利用命题之间的关系判定充要关系或进行充要性的证明.

数学学科素养

1.数学抽象：充分条件、必要条件与充要条件含义的理解；

2.逻辑推理：通过命题的判定得出充分条件、必要条件的含义，通过定义或集合关系进行充分条件、必要条件、充要条件的判断；

3.数学运算：利用充分、必要条件求参数的范围，常见包含一元二次方程及其不等式和不等式组；

4.数据分析：充要条件的探求与证明：将原命题进行等价变形或转换，直至获得其成立的充要条件，探求的过程同时也是证明的过程；

5.数学建模：通过对充分条件、必要条件的概念的理解和运用，培养学生分析、判断和归纳的逻辑思维能力。

教学重难点

重点：充分条件、必要条件、充要条件的概念..

难点：能够利用命题之间的关系判定充要关系.

课前准备

教学方法：以学生为主体，采用诱思探究式教学，精讲多练。

教学工具：多媒体。

教学过程

一、 问题导入：

写出下列两个命题的条件和结论，并判断是真命题还是假命题？

（1）若 $x > a^2 + b^2$，则 $x > 2ab$,　　　（2）若 $ab = 0$，则 $a = 0$.

学生容易得出结论；命题(1)为真命题，命题(2)为假命题.

提问：对于命题“若 p，则 q”，有时是真命题，有时是假命题．如何判断其真假的？

结论：看 p 能不能推出 q，如果 p 能推出 q，则原命题是真命题，否则就是假命题.

要求：让学生自由发言，教师不做判断。而是引导学生进一步观察.研探.

二、 预习课本，引入新课

阅读课本 17-22 页，思考并完成以下问题

1. 什么是充分条件？　　2. 什么是必要条件？

3. 什么是充要条件？　　5. 什么是充分不必要条件？

6. 什么是必要不充分条件？　　7. 什么是既不充分也不必要条件？

要求：学生独立完成，以小组为单位，组内可商量，最终选出代表回答问题，教师巡视指导，解答学生在自主学习中遇到的困惑过程。

三、新知探究，知识梳理

1．充分条件与必要条件

命题真假	“若 p，则 q”是真命题	“若 p，则 q”是假命题
推出关系	$p\Rightarrow q$	$p\nRightarrow q$
条件关系	p 是 q 的<u>充分</u>条件 q 是 p 的<u>必要</u>条件	p 不是 q 的<u>充分</u>条件 q 不是 p 的<u>必要</u>条件

2. 充要条件

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$．此时，我们说 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件．显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件，即如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件.

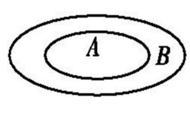
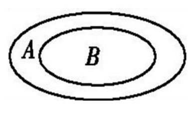
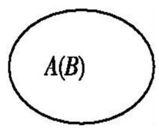
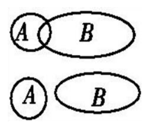
概括地说，(1)如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件.

(2)若 $p\Rightarrow q$，但 $q\nRightarrow p$，则称 p 是 q 的充分不必要条件.

(3)若 $q\Rightarrow p$，但 $p\nRightarrow q$，则称 p 是 q 的必要不充分条件.

(4)若 $p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

3.从集合角度看充分、必要条件

记法	$A=\{x\mid p(x)\}$, $B=\{x\mid q(x)\}$			
关系	$A\subsetneqq B$	$B\subsetneqq A$	$A=B$	$A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$
图示				
结论	p 是 q 的充分不必要条件	p 是 q 的必要不充分条件	p,q 互为充要条件	p 是 q 的既不充分也不必要条件

四、典例分析、举一反三

题型一　　充分条件、必要条件、充要条件的判断

例 1　指出下列各题中，p 是 q 的什么条件(在“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”中选出一种作答).

(1)在△ABC中，p：$\angle A>\angle B$，q：$BC>AC$；

(2)对于实数 x，y，p：$x+y\neq 8$，q：$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$；

(3)p：$(a-2)(a-3)=0$，q：$a=3$；(4)p：$a<b$，q：$\frac{a}{b}<1$.

【答案】见解析
【解析】(1)在△ABC中，显然有$\angle A>\angle B\Leftrightarrow BC>AC$，所以 p 是 q 的充分必要条件.
(2)因为 $x=2$ 且 $y=6\Rightarrow x+y=8$，即$\neg q\Rightarrow\neg p$，但$\neg p\not\Rightarrow\neg q$，所以 p 是 q 的充分不必要条件.
(3)由$(a-2)(a-3)=0$ 可以推出 $a=2$ 或 $a=3$，不一定有 $a=3$；由 $a=3$ 可以得出$(a-2)(a-3)=0$.因此，p 是 q 的必要不充分条件.
(4)由于 $a<b$，当 $b<0$ 时，$\frac{a}{b}>1$；

当 $b>0$ 时，$\frac{a}{b}<1$，故若 $a<b$，不一定有$\frac{a}{b}<1$；当 $a>0$，$b>0$，$\frac{a}{b}<1$ 时，可以推出 $a<b$；

当 $a<0$，$b<0$，$\frac{a}{b}<1$ 时，可以推出 $a>b$.因此 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

解题技巧：(充分条件与必要条件的判断方法)
(1)定义法
若 $p\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；若 $p\not\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件；
若 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；若 $p\not\Rightarrow q$，$q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.
(2)集合法
对于集合 $A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足条件 $q\}$，具体情况如下：
若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；
若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件；若 $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件；
若 $B\subsetneqq A$，则 p 是 q 的必要不充分条件.
(3)等价法
等价转化法就是在判断含有与“否”有关命题条件之间的充要关系时，根据原命题与其逆否命题的等价性转化为形式较为简单的两个条件之间的关系进行判断.

跟踪训练一

1．设 a，b 是实数，则“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的(　　)
A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】D

题型二　充要条件的探求与证明

例 2　(1)“$x^2-4x<0$”的一个充分不必要条件为(　　)
A．$0<x<4$　　B．$0<x<2$　　C．$x>0$　　D．$x<4$
(2)已知 x，y 都是非零实数，且 $x>y$，求证：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$的充要条件是 $xy>0$.

【答案】(1) B　(2) 见解析
【解析】(1)由 $x^2-4x<0$ 得 $0<x<4$，则充分不必要条件是集合$\{x|0<x<4\}$的子集，故选 B.
(2)法一：充分性：由 $xy>0$ 及 $x>y$，得$\frac{x}{xy}>\frac{y}{xy}$，即$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

必要性：由$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，得$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$，即$\frac{y-x}{xy}<0$.因为 $x>y$，所以 $y-x<0$，所以 $xy>0$.

所以$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$的充要条件是 $xy>0$.

法二：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0\Leftrightarrow\frac{y-x}{xy}<0$．由条件 $x>y\Leftrightarrow y-x<0$，故由$\frac{y-x}{xy}<0\Leftrightarrow xy>0$．

所以$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Leftrightarrow xy>0$，即$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$的充要条件是 $xy>0$．

解题技巧：(探求充要条件一般有两种方法)

(1)探求 A 成立的充要条件时，先将 A 视为条件，并由 A 推导结论(设为 B)，再证明 B 是 A 的充分条件，这样就能说明 A 成立的充要条件是 B，即从充分性和必要性两方面说明．

(2)将原命题进行等价变形或转换，直至获得其成立的充要条件，探求的过程同时也是证明的过程，因为探求过程每一步都是等价的，所以不需要将充分性和必要性分开来说明．

跟踪训练二

2．(1)不等式 $x(x-2)<0$ 成立的一个必要不充分条件是(　　)

A．$x\in(0,2)$　　B．$x\in[-1，+\infty)$　　C．$x\in(0,1)$　　D．$x\in(1,3)$

(2)求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根是 1 的充要条件是 $a+b+c=0$．

【答案】 (1) B　　(2) 见解析

【解析】(1) 由 $x(x-2)<0$ 得 $0<x<2$，因为$(0,2)\subsetneqq[-1，+\infty)$，所以“$x\in[-1，+\infty)$”是“不等式 $x(x-2)<0$ 成立”的一个必要不充分条件．

(2) 证明　假设 p：方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根是 1，q：$a+b+c=0$．

①证明 $p\Rightarrow q$，即证明必要性．

$\because x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，$\therefore a\cdot1^2+b\cdot1+c=0$，即 $a+b+c=0$．

②证明 $q\Rightarrow p$，即证明充分性．

由 $a+b+c=0$，得 $c=-a-b$．$\because ax^2+bx+c=0$，$\therefore ax^2+bx-a-b=0$，

即 $a(x^2-1)+b(x-1)=0$．故$(x-1)(ax+a+b)=0$．$\therefore x=1$ 是方程的一个根．

故方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根是 1 的充要条件是 $a+b+c=0$．

题型三　　利用充分、必要条件求参数的范围

例 3　已知 p：$x^2-8x-20\leq0$，q：$x^2-2x+1-m^2\leq0(m>0)$，且 p 是 q 的充分不必要条件，则实数 m 的取值范围为____

【答案】$\{m|m\geq9\}$(或$[9，+\infty)$)

【解析】　由 $x^2-8x-20\leq0$，得$-2\leq x\leq10$，由 $x^2-2x+1-m^2\leq0(m>0)$，

得 $1-m\leq x\leq1+m(m>0)$．

因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$．

即$\{x|-2\leq x\leq10\}$是$\{x|1-m\leq x\leq1+m，m>0\}$的真子集，

所以$\begin{cases}m>0,\\1-m<-2,\\1+m\geq10\end{cases}$　或$\begin{cases}1-m\leq-2,\\m>0,\\1+m>10,\end{cases}$　解得 $m\geq9$．

变式．［变条件］【例 3】本例中“p 是 q 的充分不必要条件”改为“p 是 q 的必要不充分条件”，其他条件不变，试求 m 的取值范围．

【答案】见解析

【解析】由 $x^2-8x-20\leq0$ 得$-2\leq x\leq10$，由 $x^2-2x+1-m^2\leq0(m>0)$得 $1-m\leq x\leq1+m(m>0)$

因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $q\Rightarrow p$，且 $p\nRightarrow q$．

则$\{x|1-m\leq x\leq1+m，m>0\}\subsetneqq\{x|-2\leq x\leq10\}$所以$\begin{cases}m>0\\1-m\geq-2\\1+m\leq10\end{cases}$，解得 $0<m\leq3$．

即 m 的取值范围是$(0,3]$．

解题技巧：(利用充分、必要、充分必要条件的关系求参数范围)

(1)化简 p、q 两命题，

(2)根据 p 与 q 的关系(充分、必要、充要条件)转化为集合间的关系，

(3)利用集合间的关系建立不等关系，

(4)求解参数范围.

跟踪训练三

3．已知 $P=\{x|a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x|1<x<3\}$，“$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要条件，求实数 a 的取值范围.

【答案】见解析

【解析】因为“$x\in P$”是 $x\in Q$ 的必要条件，所以 $Q\subseteq P$. 所以$\begin{cases}a-4\leq 1\\a+4\geq 3\end{cases}$　解得$-1\leq a\leq 5$

即 a 的取值范围是$[-1,5]$.

五、课堂小结

让学生总结本节课所学主要知识及解题技巧

六、板书设计

1.4　充分条件与必要条件

1.充分条件	例 1	例 2	例 3
2.必要条件			
3.充要条件			

七、作业

课本 23 页习题 1.4

教学反思

因为涉及到的知识点比较多，且知识点较繁琐，且新概念比较抽象，因此本节学习过程中，一定让学生多多参加，并且在解题技巧方面先让学生自己总结，教师再补充说明。