2.4.1　圆的标准方程

【学习目标】

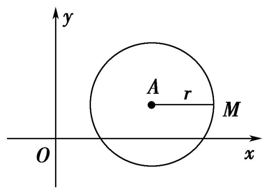
课程标准	学科素养
1. 会用定义推导圆的标准方程；掌握圆的标准方程的特点．（重点） 2. 会根据已知条件求圆的标准方程．（重点、难点） 3. 能准确判断点与圆的位置关系．（易错点）	1、直观想象 2、数学运算 3、逻辑推理

【自主学习】

1．圆的标准方程

(1)圆的定义：平面上到____的距离等于____的点的集合叫做圆，定点称为圆心，定长称为圆的半径．

(2)确定圆的基本要素是 _____和_____，如图所示．

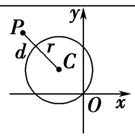
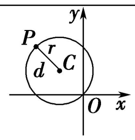
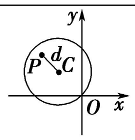


(3)圆的标准方程：圆心为 $A(a，b)$，半径长为 r 的圆的标准方程是____________________.

当 $a=b=0$ 时，方程为 $x^2+y^2=r^2$，表示以______为圆心、半径为 r 的圆．

2．点与圆的位置关系

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，其圆心为 $C(a，b)$，半径为 r，点 $P(x_0，y_0)$，设 $d=|PC|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$.

位置关系	d 与 r 的大小	图示	点 P 的坐标的特点
点在圆外	$d\geq r$		$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$____r^2
点在圆上	$d=r$		$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$___r^2
点在圆内	$d\leq r$		$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$___r^2

【小试牛刀】

1.方程$(x-a)^2+(y-b)^2=m^2$表示圆．(　　)

2.确定一个圆的几何要素是圆心和半径.(　　)

3.圆$(x+1)^2+(y+2)^2=4$的圆心坐标是(1,2)，半径是4.(　　)

4.(0,0)在圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$上.(　　)

【经典例题】

题型一　求圆的标准方程

确定圆的标准方程的方法

(1)几何法

它是利用图形的几何性质，如圆的性质等，直接求出圆的圆心和半径，代入圆的标准方程，从而得到圆的标准方程.

(2)待定系数法求圆的标准方程的一般步骤

设方程	设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
↓ 列方程组	由已知条件，建立关于a,b,r的方程组
↓ 解方程组	解方程组，求出a,b,r
↓ 得方程	将a,b,r代入所设方程，得所求圆的方程

例1　(1)圆心在点$C(2,1)$，半径长是$\sqrt{3}$的圆的标准方程为________________.

(2)经过点$P(5,1)$，圆心在点$C(8，-3)$的圆的标准方程为________________.

例2 求过点$A(1，-1)$，$B(-1,1)$，且圆心在直线$x+y-2=0$上的圆的标准方程.

[思路探究]　法一：利用待定系数法，设出圆的方程，根据条件建立关于参数方程组求解；法二：利用圆心在直线上，设出圆心坐标，根据条件建立方程组求圆心坐标和半径，从而求圆的方程；法三：借助圆的几何性质，确定圆心坐标和半径，从而求方程.

[跟踪训练]1　已知圆 C 经过 $A(5,1)$，$B(1,3)$两点，圆心在 x 轴上，则 C 的标准方程为________.

题型二　点与圆的位置关系

判断点与圆的位置关系的方法

(1)只需计算该点与圆的圆心距离，与半径作比较即可；

(2)把点的坐标代入圆的标准方程，判断式子两边的符号，并作出判断.

例 3　已知圆的圆心 M 是直线 $2x+y-1=0$ 与直线 $x-2y+2=0$ 的交点，且圆过点 $P(-5,6)$，求圆的标准方程，并判断点 $A(2,2)$，$B(1,8)$，$C(6,5)$是在圆上，在圆内，还是在圆外？

[跟踪训练]2　已知点(1,1)在圆$(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的外部，则 a 的取值范围为__________.

题型三　与圆有关的最值问题

最值问题的常见类型及解法

(1)形如 $u=\dfrac{y-b}{x-a}$形式的最值问题，可转化为过点(x, y)和(a, b)的动直线斜率的最值问题.

(2)形如 $l=ax+by$ 形式的最值问题，可转化为动直线 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{l}{b}$截距的最值问题.

(3)形如$(x-a)^2+(y-b)^2$ 形式的最值问题，可转化为动点(x, y)到定点(a, b)的距离的平方的最值问题.

(4)求圆外一点到圆的最大距离和最小距离，　可采用几何法，先求出该点到圆心的距离，再加上或减去圆的半径，即可得距离的最大值和最小值.

例 4　已知 x 和 y 满足$(x+1)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$,

（1）求 x^2+y^2 的最值.

（2）求$\dfrac{y}{x}$的取值范围.

[跟踪训练]3 圆的方程为(x＋1)2＋y2＝4，则过(0,0)的弦中，最长弦长为________，最短弦长为________.

【当堂达标】

1、以两点 $A(-3，-1)$和 $B(5,5)$为直径端点的圆的方程是(　　)

A.$(x+1)^2+(y+2)^2=100$　　B.$(x-1)^2+(y-2)^2=100$

C.$(x+1)^2+(y+2)^2=25$　　D.$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

2．两个点 $M(2，-4)$，$N(-2,1)$与圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 的位置关系是(　　)

A．点 M 在圆 C 外，点 N 在圆 C 外

B．点 M 在圆 C 内，点 N 在圆 C 内

C．点 M 在圆 C 外，点 N 在圆 C 内

D．点 M 在圆 C 内，点 N 在圆 C 外

3. 圆心为直线 $x-y+2=0$ 与直线 $2x+y-8=0$ 的交点，且过原点的圆的标准方程是________.

4.与 y 轴相切，且圆心坐标为$(-5，-3)$的圆的标准方程为　________________.

5. 已知圆心为点 $C(-3，-4)$，且经过原点，求该圆的标准方程，并判断点 $P_1(-1,0)$，$P_2(1，-1)$，$P_3(3，-4)$和圆的位置关系.

6.求经过点 $P(1,1)$和坐标原点，并且圆心在直线 $2x+3y+1=0$ 上的圆的标准方程.

【参考答案】

【自主学习】

定点　定长　圆心　半径　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　原点 O　$>$　$=$　$<$

【小试牛刀】

×√××

【经典例题】

例 1 (1)$(x-2)^2+(y-1)^2=3$

(2)$(x-8)^2+(y+3)^2=25$

例 2 [解]　法一：设所求圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

由已知条件知$\begin{cases}(1-a)^2+(-1-b)^2=r^2,\\(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\a+b-2=0,\end{cases}$　解此方程组，得$\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r^2=4.\end{cases}$

故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

法二：设点 C 为圆心，∵点 C 在直线 $x+y-2=0$ 上，

∴可设点 C 的坐标为$(a,2-a)$．又∵该圆经过 A，B 两点，

∴$|CA|=|CB|$.

∴$\sqrt{(a-1)^2+(2-a+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2-a-1)^2}$，解得 $a=1$.

∴圆心坐标为 $C(1,1)$，半径长 $r=|CA|=2$.

故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

法三：由已知可得线段 AB 的中点坐标为$(0,0)$，$k_{AB}=\dfrac{1-(-1)}{-1-1}=-1$，

所以弦 AB 的垂直平分线的斜率为 $k=1$，

所以 AB 的垂直平分线的方程为 $y-0=1\cdot(x-0)$，

即 $y=x$.则圆心是直线 $y=x$ 与 $x+y-2=0$ 的交点，由$\begin{cases}y=x,\\x+y-2=0,\end{cases}$　得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

即圆心为$(1,1)$，圆的半径为 $r=\sqrt{(1-1)^2+[1-(-1)]^2}=2$，

故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

[跟踪训练]1　$(x-2)^2+y^2=10$　[由圆的几何性质得，圆心在 AB 的垂直平分线上，结合题意知，AB 的垂直平分线为 $y=2x-4$，令 $y=0$，得 $x=2$，故圆心坐标为$(2,0)$，所以圆的半径 $r=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$，故圆的方程为$(x-2)^2+y^2=10$.

例 3 [解]　解方程组$\begin{cases}2x+y-1=0,\\x-2y+2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$∴圆心 M 的坐标为(0,1)，

半径 $r=|MP|=\sqrt{5^2+\quad 1-6\quad ^2}=5\sqrt{2}$.

∴圆的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=50$.

∵$|AM|=\sqrt{\quad 2-0\quad ^2+\quad 2-1\quad ^2}=\sqrt{5}<r$,

∴点 A 在圆内. ∵$|BM|=\sqrt{\quad 1-0\quad ^2+\quad 8-1\quad ^2}=\sqrt{50}=r$,

∴点 B 在圆上. ∵$|CM|=\sqrt{\quad 6-0\quad ^2+\quad 5-1\quad ^2}=\sqrt{52}>r$,

∴点 C 在圆外.

∴圆的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=50$，且点 A 在圆内，点 B 在圆上，点 C 在圆外.

[跟踪训练]2　$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$

解析　由题意知，$(1-a)^2+(1+a)^2>4$，$2a^2-2>0$，即 $a<-1$ 或 $a>1$.

例 4 [解]　（1）由题意知 x^2+y^2 表示圆上的点到坐标原点距离的平方，显然当圆上的点与坐标原点的距离取最大值和最小值时，其平方也相应取得最大值和最小值. 原点 $O(0,0)$到圆心 $C(-1,0)$的距离 $d=1$，故圆上的点到坐标原点的最大距离为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，最小距离为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.因此 x^2+y^2 的最大值和最小值分别为$\frac{9}{4}$和$\frac{1}{4}$.

（2）设 $k=\frac{y}{x}$，变形为 $k=\frac{y-0}{x-0}$，此式表示圆上一点(x, y)与点(0, 0)连线的斜率，

由 $k=\frac{y}{x}$，可得 $y=kx$，此直线与圆有公共点，圆心到直线的距离 $d\le r$，即$\frac{|-k|}{\sqrt{k2+1}}\le\frac{1}{2}$，解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\frac{\sqrt{3}}{3}$.即$\frac{y}{x}$的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

[跟踪训练]3　4　$2\sqrt{3}$　点(0,0)在圆内，最长的弦为过 O 的直径，所以最大弦长为 $2r=4$.最短弦是过 O 且与过 O 的直径垂直的弦，因为 O(0,0)与圆的距离为 1，所以最短弦长为 $2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

【当堂达标】

1.　D 解析　∵AB 为直径，∴AB 的中点(1,2)为圆心，$\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{\quad 5+3\quad ^2+\quad 5+1\quad ^2}=5$ 为半径，∴该圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

2. D　[将点的坐标代入方程左边得 $2^2+(-4)^2-2\times2+4\times(-4)-4=-4<0$，∴$M$ 点在圆内，(−

$2)^2+1^2-2\times(-2)+4\times1-4=9>0$，∴$N$ 点在圆外．故选 D.]

3.$(x-2)^2+(y-4)^2=20$　[由$\begin{cases}x-y+2=0,\\2x+y-8=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$，即圆心为(2,4)，从而 $r=\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$，故圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=20$.]

4.　$(x+5)^2+(y+3)^2=25$

解析　∵圆心坐标为(−5，−3)，又与 y 轴相切，∴该圆的半径为 5，

∴该圆的标准方程为$(x+5)^2+(y+3)^2=25$.

5.[解]　因为圆心是 $C(-3，-4)$，且经过原点，所以圆的半径 $r=\sqrt{(-3-0)^2+(-4-0)^2}=5$，所以圆的标准方程是$(x+3)^2+(y+4)^2=25$.

因为$|P_1C|=\sqrt{(-1+3)^2+(0+4)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}<5$，所以 $P_1(-1,0)$在圆内；

因为$|P_2C|=\sqrt{(1+3)^2+(-1+4)^2}=5$，所以 $P_2(1，-1)$在圆上；

因为$|P_3C|=\sqrt{(3+3)^2+(-4+4)^2}=6>5$，所以 $P_3(3，-4)$在圆外.

6. 解　方法一　(待定系数法)

设圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则有$\begin{cases}a^2+b^2=r^2,\\(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\2a+3b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\b=-3,\\r=5.\end{cases}$∴圆的标准方程是$(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

方法二　(几何法)

由题意知 OP 是圆的弦，其垂直平分线为 $x+y-1=0$.

∵弦的垂直平分线过圆心，

∴由$\begin{cases}2x+3y+1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=4,\\y=-3,\end{cases}$即圆心坐标为(4，−3)，半径为 $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

∴圆的标准方程是$(x-4)^2+(y+3)^2=25$.