2.1.1　倾斜角与斜率

【学习目标】

课程标准	学科素养
1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念. 2. 掌握求直线斜率的两种方法(重点). 3.了解在平面直角坐标系中确定一条直线的几何要素.	1、直观想象 2、数学运算 3、数形结合

【自主学习】

1.直线的倾斜角

当直线 l 与 x 轴相交时，我们取____作为基准，x 轴正向与直线 l__方向之间所成的角α叫做直线 l 的倾斜角.

直线的倾斜角α的取值范围是{________}，并规定与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为__.

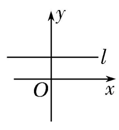
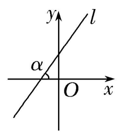
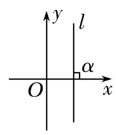
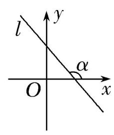
注意三个条件：①x 轴正向；②直线向上的方向；③小于 180°的非负角.

2.斜率的概念及斜率公式

定义：倾斜角$\alpha(\alpha\neq 90°)$的_______.

记法：$k=$______.

3.斜率与倾斜角的对应关系

图示				
倾斜角(范围)	$\alpha=0°$	$0°<\alpha<90°$	$\alpha=$___	$90°<\alpha<180°$
斜率(范围)	____	____	不存在	_____
k 的增减情况		k 随α的增大而增大		k 随α的增大而增大

其对应情况如下表所示.

斜率 k	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
倾斜角α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°

由上表可见，当直线的斜率 $k=0$，$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，±1，$\pm\sqrt{3}$或斜率 k 不存在时，其倾斜角均是特殊角.

4.斜率公式

经过两点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)(x_1\neq x_2)$的直线的斜率公式：$k=$ ________.

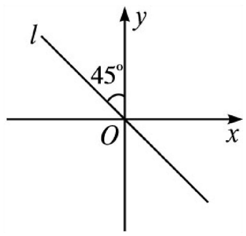
注意：当 $x_1=x_2$ 时，斜率不存在.

【小试牛刀】

1．只给出一个倾斜角能确定一条直线吗？

2．当一条直线的倾斜角为 0°时，这条直线一定与 x 轴平行吗？

3.如图所示，直线 l 的倾斜角为(　　)



A．45°　　B．135°　　C．0°　　D．不存在

4．已知一条直线的倾斜角$\alpha=45°$，则该直线的斜率等于(　　)

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．-1

【经典例题】

题型一　直线的倾斜角

例 1 下列命题正确的是(　　)

A．两条不重合的直线，如果它们的倾斜角相等，那么这两条直线平行

B．若一条直线的倾斜角为α，则此直线的斜率为 $\tan\alpha$

C．若α，2α，3α分别为三条直线的倾斜角，则α的度数可以大于 60°

D．若α是直线 l 的倾斜角，且 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\alpha=45°$

[跟踪训练] 1　(1)已知直线 l 的倾斜角为$\theta-25°$，则角θ的取值范围为(　　)

A.$25°\leq\theta<155°$　　B.$-25°\leq\theta<155°$

C.$0°\leq\theta<180°$　　D.$25°\leq\theta<205°$

（2）已知直线 l 向上方向与 y 轴正向所成的角为 30°，则直线 l 的倾斜角为________.

题型二　直线斜率的运算

例 2 （1）**（利用斜率定义）**若直线的倾斜角为 60°，则直线的斜率为(　　)

A.$\sqrt{3}$　　B．$-\sqrt{3}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

（2）（**利用斜率公式**）经过下列两点的直线的斜率是否存在？如果存在，求其斜率，并确定直线的倾斜角α.

①$A(2,3)$，$B(4,5)$；

②$C(-2,3)$，$D(2，-1)$；

③$P(-3,1)$，$Q(-3,10)$.

[跟踪训练] 2　(1)若直线的倾斜角为60°，则直线的斜率为(　　)

A.$\sqrt{3}$　B.$-\sqrt{3}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　D.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2)已知过$A(3,1)$，$B(m，-2)$的直线的斜率为1，则m的值为________.

题型三　利用数形结合求倾斜角或斜率范围

涉及直线与线段有交点问题常利用数形结合及公式求解.

例3 已知两点$A(-3，4)$，$B(3，2)$，过点$P(1，0)$的直线l与线段AB有公共点.

(1)求直线l的斜率k的取值范围；

(2)求直线l的倾斜角α的取值范围.

[跟踪训练] 3　直线l过点$P(1,0)$，且与以$A(2,1)$，$B(0，\sqrt{3})$为端点的线段有公共点，求直线l的斜率和倾斜角的取值范围.

题型四　直线的斜率的应用

例 4 已知实数 x，y 满足 $y=-2x+8$，且 $2\le x\le 3$，求$\frac{y}{x}$的最大值和最小值．

例 5 已知三点 $A(0,1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$，求证：A，B，C 三点共线.

[跟踪训练] 4　如果三点 $A(2,1)$，$B(-2，m)$，$C(6,8)$在同一条直线上，求实数 m 的值.

【当堂达标】

1．对于下列命题：

①若α是直线 l 的倾斜角，则 $0°\le\alpha<180°$；

②若 k 是直线的斜率，则 $k\in\mathbf{R}$；

③任一条直线都有倾斜角，但不一定有斜率；

④任一条直线都有斜率，但不一定有倾斜角．

其中正确命题的个数是(　　)

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

2.若经过 $A(m,3)$，$B(1,2)$两点的直线的倾斜角为 45°，则 m 等于(　　)

A.2　　B.1　　C.－1　　D.－2

3．一条直线的斜率等于$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则此直线的倾斜角等于________.

4.已知点 $A(1,2)$,若在坐标轴上有一点 P,使直线 PA 的倾斜角为 135°,则点 P 的坐标为________.

5.求经过 $A(m,3)$，$B(1,2)$两点的直线的倾斜角α的取值范围是________.(其中 $m\geq 1$)

6．求经过下列两点的直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角．

(1)(1，1)，(2，4)；　　(2)(－3，5)，(0，2)；

(3)(2，3)，(2，5)；　　(4)(3，－2)，(6，－2)．

7．已知三点 $A(1,3)$，$B(5,11)$，$C(－3，－5)$，求证：这三点在同一条直线上．

【参考答案】

【自主学习】

1.x 轴　向上　$\alpha|0°\le\alpha<180°$　0°

2.正切值　tan__α

3.90° $k=0$　$k>0$　$k<0$

4.$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

【小试牛刀】

1.不能．倾斜角只能确定直线的方向，要确定直线还需知道直线上的一个点．

2.不一定，也可能与 x 轴重合．

3.B

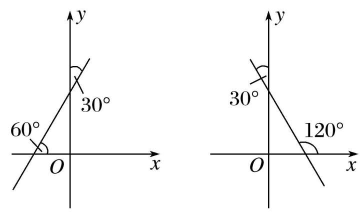
4. C 解析　$k=\tan\alpha=\tan 45°=1$.

【经典例题】

例 1　A 解析　$0°\le\alpha<180°$，当$\alpha=90°$，此时直线不存在斜率，B 错；$\alpha=60°$时，$3\alpha=180°$，C 错；$\tan 45°=1$，D 错．

[跟踪训练] 1　（1）D 解析　因为直线 l 的倾斜角为$\theta-25°$，所以 $0°\le\theta-25°<180°$，
所以 $25°\le\theta<205°$.

（2）60°或 120°　解析　有两种情况：①如图(1)，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 60°，即直线 l 的倾斜角为 60°.



（1）　（2）

②如图(2)，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 120°，即直线 l 的倾斜角为 120°.

例 2　（1）　A 解析　$k=\tan 60°=\sqrt{3}$.

（2）解　①存在.直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{5-3}{4-2}=1$，即 $\tan\alpha=1$，

又 $0°\le\alpha<180°$，所以倾斜角$\alpha=45°$.

②存在.直线 CD 的斜率 $k_{CD}=\frac{-1-3}{2-\quad-2}=-1$，即 $\tan\alpha=-1$，又 $0°\le\alpha<180°$，所以倾斜角α

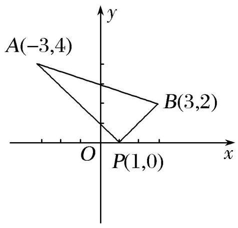
$=135°$.

③不存在.因为 $x_P=x_Q=-3$，所以直线 PQ 的斜率不存在，所以倾斜角$\alpha=90°$.

[跟踪训练] 2 （1）A 解析 利用斜率的定义计算

（2） 0 解析 由斜率公式计算斜率

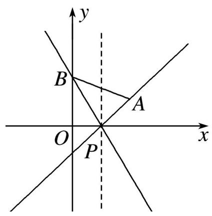
例 3 解 如图所示，由题意，知 $k_{PA}=\dfrac{4-0}{-3-1}=-1$，$k_{PB}=\dfrac{2-0}{3-1}=1$.



(1)要使直线 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $k\le-1$ 或 $k\ge1$.

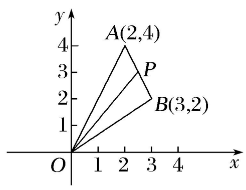
(2)由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与 PA 的倾斜角之间，又 PB 的倾斜角是 45°，PA 的倾斜角是 135°，所以α的取值范围是 $45°\le\alpha\le135°$.

[跟踪训练] 3 解 如图所示.



$\because k_{AP}=\dfrac{1-0}{2-1}=1$，$k_{BP}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{0-1}=-\sqrt{3}$，$\therefore k\in(-\infty,\ -\sqrt{3}]\cup[1,\ +\infty)$，$\therefore 45°\le\alpha\le120°$.

例 4 解 如图所示，由于点$(x,\ y)$满足关系式 $2x+y=8$，且 $2\le x\le3$，可知点 $P(x,\ y)$在线段 AB 上移动，并且 A，B 两点的坐标可分别求得为(2，4)，(3，2).



由于$\dfrac{y}{x}$的几何意义是直线 OP 的斜率，且 $k_{OA}=2$，$k_{OB}=\dfrac{2}{3}$，

所以可求得$\dfrac{y}{x}$的最大值为 2，最小值为$\dfrac{2}{3}$.

例 5 证明 $\because k_{AB}=\dfrac{3-1}{1-0}=2$，$k_{BC}=\dfrac{5-3}{2-1}=2$，$\therefore k_{AB}=k_{BC}$，$\therefore A$，$B$，$C$ 三点共线.

[跟踪训练] 4 解 $k_{AB}=\frac{m-1}{-2-2}=\frac{1-m}{4}$，$k_{AC}=\frac{8-1}{6-2}=\frac{7}{4}$，

∵A，B，C 三点共线，∴$k_{AB}=k_{AC}$，即$\frac{1-m}{4}=\frac{7}{4}$，∴$m=-6$.

【当堂达标】

1. C 解析 ①②③正确.

2. A 解析 由题意知，$\tan 45°=\frac{2-3}{1-m}$，得 $m=2$.

3. 30° 解析 $k=\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $0°\leq\alpha<180°$，故$\alpha=30°$.

4. (3，0)或(0，3) 解析 由题意知 $k_{PA}=-1$，若 P 点在 x 轴上，则设 $P(m，0)$，则$\frac{0-2}{m-1}=-1$，

解得 $m=3$；若 P 在 y 轴上，则设 $P(0，n)$，则$\frac{n-2}{0-1}=-1$，解得 $n=3$；故 P 点的坐标为(3，0)

或(0，3).

5. $0°<\alpha\leq 90°$ 解析 当 $m=1$ 时，倾斜角$\alpha=90°$；当 $m>1$ 时，$\tan\alpha=\frac{3-2}{m-1}>0$，

∴$0°<\alpha<90°$.故 $0°<\alpha\leq 90°$.

6.解 (1)$k=\frac{4-1}{2-1}=3>0$，所以倾斜角是锐角；

(2)$k=\frac{2-5}{0-(-3)}=-1<0$，所以倾斜角是钝角；

(3)由 $x_1=x_2=2$ 得：k 不存在，倾斜角是 90°；

(4)$k=\frac{-2-(-2)}{6-3}=0$，所以倾斜角为 0°.

7. 证明：由斜率公式，得 $k_{AB}=\frac{11-3}{5-1}=2$，$k_{AC}=\frac{-5-3}{-3-1}=2$，

∴$k_{AB}=k_{AC}$，且 AB 与 AC 都过点 A，

∴直线 AB，AC 斜率相同，且过同一点 A，

∴A，B，C 这三点在同一条直线上.

反盗版维权声明

北京凤凰学易科技有限公司（学科网：www.zxxk.com）郑重发表如下声明：

一、本网站原创内容，由本网站依照运营规划，安排专项经费，组织名校名师创作完成，本公司拥有著作权。

二、本网站刊登的试卷、教案、课件、学案等内容，经著作权人授权，本公司享有独家信息网络传播权。

三、任何个人、企事业单位（含教育网站）或者其他组织，未经本公司许可，不得以复制、发行、表演、广播、信息网络传播、改编、汇编、翻译等任何方式使用本网站任何作品及作品的组成部分。

四、一旦发现侵犯本网站作品著作权的行为，欢迎予以举报。

举报电话：010-58425260。

举报内容对查实侵权行为确有帮助的，一经确认，将给予所获得奖励。

五、我们将联合全国各地文化执法机关和相关司法机构，并结合广大用户和网友的举报，严肃清理侵权盗版行为，依法追究侵权者的民事、行政和刑事责任！

特此声明！

北京凤凰学易科技有限公司