# 7.3.2 离散型随机变量的方差

## 教材分析

本节课选自《2019 人教 A 版高中数学选择性必修第三册》，第七章《随机变量及其分布列》，本节课主本节课主要学习离散型随机变量的方差

本节本部分内容主要包括随机变量的均值和方差。本节课是前面学习完随机变量分布列的基础上进行研究的，知识上具有着承前启后的作用。随机变量的均值和方差是概率论和数理统计的重要概念，节课是从实际出发，通过抽象思维，建立数学模型，进而认知数学理论，应用于实际的过程。

## 教学目标与核心素养

| 课程目标 | 学科素养 |
|---|---|
| A. 通过实例,理解取有限个值的离散型随机变量的方差、标准差的概念和意义.<br>B.会求离散型随机变量的方差、标准差.<br>C.会利用离散型随机变量的方差、标准差解决一些实际问题. | 1.数学抽象：离散型随机变量的方差的概念<br>2.逻辑推理：离散型随机变量的方差的性质<br>3.数学运算：求离散型随机变量的方差<br>4.数学建模：模型化思想 |

## 重点难点

重点：理解离散型随机变量的方差、标准差的概念及其求解

难点：利用离散型随机变量的方差、标准差解决一些实际问题.

## 课前准备

多媒体

## 教学过程

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

| 教学过程 | 教学设计意图<br>核心素养目标 |
| --- | --- |

**一、 问题导学**

随机变量的均值是一个重要的数字特征，它反映了随机变量取值的平均水平或分布的“集中趋势” .因为随机变量的取值围绕其均值波动，而随机变量的均值无法反映波动幅度的大小，所以我们还需要寻找反映随机变量取值波动大小的数字特征.

通过知识回顾，提出问题.

**二、 探究新知**

探究 1：从两名同学中挑出一名代表班级参加射击比赛。根据以往的成绩记录，甲、乙两名同学击中目标靶的环数 X 和 Y 的分布列如下表 1 和表 2 所示：**如何评价这两名同学的射击水平？**

**$E(X)=8$ ;$E(Y)=8$**

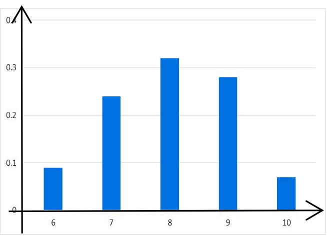
**因为两个均值相等，所以均值不能区分这两名同学的射击水平。**

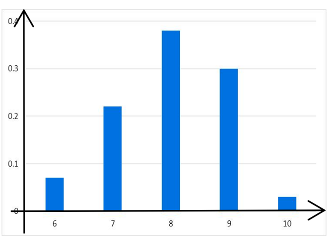
**表 1**

| X | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | 0.09 | 0.24 | 0.32 | 0.28 | 0.07 |

**表 2**

| X | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | 0.07 | 0.22 | 0.38 | 0.3 | 0.03 |




**射击水平除了要考虑击中环数的均值外，还要考虑稳定性，即击中环数的离散程度，图一和图二分别是 X 和 Y 的概率分布图：**

**发现乙同学的射击成绩更集中于 8 环，即乙同学的设计成绩更稳定。**

探究 2：怎样定量到留离散型随机变量取值的离散程度?

通过具体的问题情境，引发学生思考积极参与互动，说出自己见解。从而引入离散型随机变量分布列方差的概念，发展学生逻辑推理、数学运算、数学抽象和数学建模的核心素养。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

我们知道,样本方差可以度量一组样本数据的离散程度,它是通过计算所有数据与样本均值的“偏差平方的平均值”来实现的,一个自然的想法是,随机变量的离散程度能否用可能取值与均值的“偏差平方的平均值”来度量呢?

问题 1.某人射击 10 次，所得环数分别是：1,1,1,1,2,2,2,3,3,4；则所得的平均环数是多少？

$$\overline{X}=\frac{1+1+1+1+2+2+2+3+3+4}{10}$$

$$=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$$

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

问题 2.某人射击 10 次,所得环数分别是:1,1,1,1,2,2,2,3,3,4；则这组数据的方差是多少？

$$s^2=\frac{1}{10}[(1-2)^2+(1-2)^2+(1-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2$$

$$+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2+(4-2)^2]=1$$

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_i-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$$

$$s^2=\frac{4}{10}\times(1-2)^2+\frac{3}{10}\times(2-2)^2+\frac{2}{10}\times(3-2)^2+\frac{1}{10}\times(4-2)^2$$

**反映这组数据相对于平均值的集中程度的量**

**一般地，若离散型随机变量 X 的概率分布列为：**

**则称**

$$D(X)=(x_1-EX)^2p_1+\cdots+(x_i-EX)^2p_i+\cdots+(x_n-EX)^2p_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-EX)^2p_i$$

**为随机变量 X 的方差，有时也记为 Var(X).**

**称$\sigma(X)=\sqrt{DX}$为随机变量 X 的标准差。**

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_i$ | … | $p_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|

**离散型随机变量取值的方差**

随机变量的方差和标准差都可以度量随机变量的取值与其均值的偏离程度，反映了随机变量取值的离散程度，方差或标准差越小，随机变量的取值越集中；方差或标准差越大，随机变量的取值越分散。因此，问题 1 中两名同学射击成绩的方差和标准差来刻画它们成绩的稳定性。两名同学射击成绩的方差和标准差分别为:

$$D(X)=\sum_{i=6}^{10}(i-8)^2P(X=i)=1.16,\sqrt{D(X)}\approx 1.077;$$

$$D(Y)=\sum_{i=6}^{10}(i-8)^2P(Y=i)=0.92,\sqrt{D(Y)}\approx 0.959;$$

因为 D(Y)<D(X)(等价地，$\sqrt{D(Y)}<\sqrt{D(X)}$)，所以随机变量 Y 的取值相对更集中，即乙同学的射击成绩相对更稳定。

**问题 3：方差的计算可以简化吗？**

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2E(X)x_i+(E(X))^2)p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(E(X))^2$$

**问题 4：离散型随机变量 X 加上一个常数，方差会有怎样变化？离散型随机变量 X 乘以一个常数，方差又有怎样的变化？它们和期望的性质有什么不同？**

离散型随机变量 X 加上一个常数 $b$，仅仅使 $X$ 的值产生一个平移，不改变 $X$ 与其均值的离散程度，方差保持不变，即 $D(X+b)=D(X)$ 而离散型随机变量 $X$ 乘以一个常数 $a$,其方差变为原方差的 $a^2$ 倍，即 $D(aX)=a^2D(X)$,因此，$D(aX+b)=a^2D(X)$.

**三、典例解析**

例 1：抛掷一枚质地均匀的骰子，求掷出的点数 X 的方差。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

解：随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{1}{6}, k=1,2,3,4,5,6.$ 因为 $E(X)$

$$=\frac{7}{2},$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6}(k^2\times\frac{1}{6})$$

$$=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$$所以 $D(X)$

$$=\sum_{i=1}^{6}(k^2\times\frac{1}{6})-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

方差的计算方法

方差的计算需要一定的运算能力,在随机变量 $X^2$ 的均值比较好计算的情况下,运用关系式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 不失为一种比较实用的方法.

另外注意方差性质的应用,如 $D(aX+b)=a^2D(X)(a\neq0)$.

跟踪训练 **1** 已知$\eta$的分布列为

(1)求$\eta$的方差及标准差;

(2)设 $Y=2\eta-E(\eta)$,求 $D(Y)$.

| $\eta$ | 0 | 10 | 20 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

解:(1)$\because E(\eta)=0\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{15}+50\times\frac{2}{15}+60\times\frac{1}{15}=16,$

$D(\eta)=(0-16)^2\times\frac{1}{3}+(10-16)^2\times\frac{2}{5}+(20-16)^2\times\frac{1}{15}+(50-16)^2\times\frac{2}{15}$

$+(60-16)^2\times\frac{1}{15}=384,$

$\therefore\sqrt{D(\eta)}=8\sqrt{6}.$

(2)$\because Y=2\eta-E(\eta),\therefore D(Y)=D(2\eta-E(\eta))=2^2D(\eta)=4\times384=1\,536.$

例 2：投资 A、B 两种股票，每股收益的分布列分别如表 1 和表二所示：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 收益 X/元 | -1 | 0 | 2 |

通过典例解析，提升对概念精细化的理解。让学生掌握方差的算法。发展学生逻辑推理，直观想象、数学抽象和数学运算的核心素养。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

| | | | |
|---|---|---|---|
| 概率 | 0.1 | 0.3 | 0.6 |

**表 1**

| 收益 X/元 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 概率 | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

**表 2**

**（1）投资哪种股票的期望收益大？**

**（2）投资哪种股票的风险较高？**

解：(1)股票 A 和股票 B 投资收益的期望分别为

$E(X)=(-1)\times0.1+0\times0.3+2\times0.6=1.1$,$E(Y)=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1$.

因为 E(X)>E(Y),所以投资股票 A 的期望收益较大。

(2)股票 A 和股票 B 投资收益的方差分别为

$D(X)=(-1)^2\times0.1+0^2\times0.3+2^2\times0.6-1.1^2=1.29$,

$D(Y)=0^2\times0.3+1^2\times0.4+2^2\times0.3-1^2=0.6$.

因为 E(X)和 E(Y)相差不大，且 D(X)>D(Y),所以资股票 A 比投资股票 B 的风险高。

利用均值和方差的意义解决实际问题的步骤

**1**.比较均值.离散型随机变量的均值反映了离散型随机变量取值的平均水平,因此,在实际决策问题中,需先计算均值,看一下谁的平均水平高.

**2**.在均值相等或接近的情况下计算方差.方差反映了离散型随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度.通过计算方差,分析一下谁的水平发挥相对稳定.

**3**.下结论.依据均值和方差做出结论.

跟踪训练 2. $A$、$B$ 两个投资项目的利润率分别为随机变量 $X_1$ 和 $X_2$，根据市场分析， $X_1$ 和 $X_2$ 的分布列分别为

| $X_1$ | 2% | 8% | 12 |
|---|---|---|---|

| | $X_2$ | 5% | 10% |
|---|---|---|---|

通过典例解析，在具体的问题情境中，深化概率的理解。发展学生逻辑推理，直观想象、数学抽象和数学运算的核心素养。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | % |
| $P$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | $P$ | 0.8 | 0.2 |

求：(1)在 $A$、$B$ 两个项目上各投资 100 万元， $Y_1$ 和 $Y_2$ 分别表示投资项目 $A$ 和 $B$ 所获得的利润，求方差 $D(Y_1)$和 $D(Y_2)$；

(2)根据得到的结论，对于投资者有什么建议？

解：(1)题目可知，投资项目 $A$ 和 $B$ 所获得的利润 $Y_1$ 和 $Y_2$ 的分布列为：

| $Y_1$ | 2 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

| $Y_2$ | 5 | 10 |
|---|---|---|
| $P$ | 0.8 | 0.2 |

所以 $E(Y_1)=2\times0.2+8\times0.5+12\times0.3=8$；

$$D(Y_1)=(2-8)^2\times0.2+(8-8)^2\times0.5+(12-8)^2\times0.3=12$$

$$E(Y_2)=5\times0.8+10\times0.2=6$$

；

$$D(Y_2)=(5-6)^2\times0.8+(10-6)^2\times0.2=4$$

解：(2) 由(1)可知 $E(Y_1)>E(Y_2)$，说明投资 $A$ 项目比投资 $B$ 项目期望收益要高；同时 $D(Y_1)>D(Y_2)$，说明投资 $A$ 项目比投资 $B$ 项目的实际收益相对于期望收益的平均波动要更大.

因此，对于追求稳定的投资者，投资 $B$ 项目更合适;而对于更看重利润并且愿意为了高利润承担风险的投资者，投资 $A$ 项目更合适.

三、达标检测

1．给出下列四个命题：

①离散型随机变量 $X$ 的均值 $E(X)$反映了 $X$ 取值的平均值；

②离散型随机变量 $X$ 的方差 $D(X)$反映了 $X$ 取值的平均水平；

③离散型随机变量 $X$ 的均值 $E(X)$反映了 $X$ 取值的平均水平；

通过练习巩固本节所学知识，通过学生解决问题，发展学生的数学运算、逻

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

④离散型随机变量 $X$ 的方差 $D(X)$反映了 $X$ 取值偏离于均值的平均程度.

则正确命题应该是(　　)

A．①④　　B．②③ C．①②　　D．③④

D

2．把下面 $X$ 的分布列填写完整：并完成问题

其中 $p\in(0,1)$，则 $E(X)=$________，$D(X)=$________.

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | | $P$ |

解析：而由已知分布列的性质有 $p+x=1$，$x=1-p$

$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$，

$\therefore D(X)=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2p=p(1-p)$.

答案：$1-p$；　$p$；　$p(1-p)$

**3**.已知离散型随机变量 $X$ 的分布列如下表.若

$E(X)=0,D(X)=1,a=$__________,$b=$__________.

| $X$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $a$ | $b$ | $c$ | $\frac{1}{12}$ |

解析:由题知 $a+b+c=\frac{11}{12}$,$-a+c+\frac{1}{6}=0$,$1^2\times a+1^2\times c+2^2\times\frac{1}{12}=1$,

解得 $a=\frac{5}{12}$,$b=\frac{1}{4}$.　答案:$\frac{5}{12}$　$\frac{1}{4}$

**4.**甲、乙两个野生动物保护区有相同的自然环境,且野生动物的种类和数量也大致相等,而两个保护区内每个季度发现违反保护条例的事件次数的分布列分别如下,

甲保护区:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.3 | 0.2 | 0.2 |

乙保护区:

辑推理、直观想象、数学建模的核心素养。

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

试评定这两个保护区的管理水平.

解:甲保护区违规次数 $X$ 的数学期望和方差为

$E(X)=0\times0.3+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.2=1.3$,

$D(X)=(0-1.3)^2\times0.3+(1-1.3)^2\times0.3+(2-1.3)^2\times0.2+(3-1.3)^2\times0.2=1.21$.

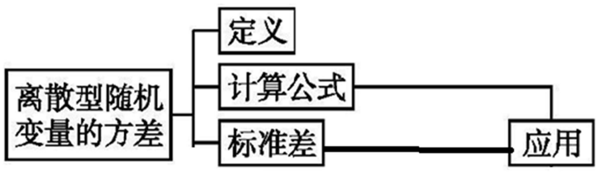
乙保护区的违规次数 $Y$ 的数学期望和方差为

$E(Y)=0\times0.1+1\times0.5+2\times0.4=1.3$,

$D(Y)=(0-1.3)^2\times0.1+(1-1.3)^2\times0.5+(2-1.3)^2\times0.4=0.41$.

因为 $E(X)=E(Y)$,$D(X)>D(Y)$,所以两个保护区内每个季度发生的违规事件的平均次数相同,但甲保护区的违规事件次数相对分散和波动,乙保护区内的违规事件次数更加集中和稳定,所以乙保护区的管理水平比甲高.

四、小结




通过总结，让学生进一步巩固本节所学内容，提高概括能力。

五、课时练

## 教学反思

课后通过对教学过程的反思与研究, 才能不断完善教学设计中的不足, 才能提升教材分析的能力和课堂教学实效.

1. 多元展示, 多方评价. 在教学过程中我借问题牵引，保证了课堂教学的顺利实施；而在整个过程中，我对学生所作练习、疑问及时解析评价；学生之间、小组之间的互相评价补充，使学生共享成果分享喜悦，坚定了学好数学的信念，实现了预期目标.

2. 创造性的使用教材. 有别于教材，我在教学中,让学生考察了分别考察了两类题型之后再引导学生进行归纳, 这样更贴近学生的认知水平， 学生课后反馈，效果较为理想.

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来

本资料分享自千人教师 QQ 群 323031380 期待你的加入与分享 300G 资源等你来