5．4　三角函数的图象与性质

5.4.1　正弦函数、余弦函数的图象

基础认知·自主学习

能力形成·合作探究

素养发展·创新应用

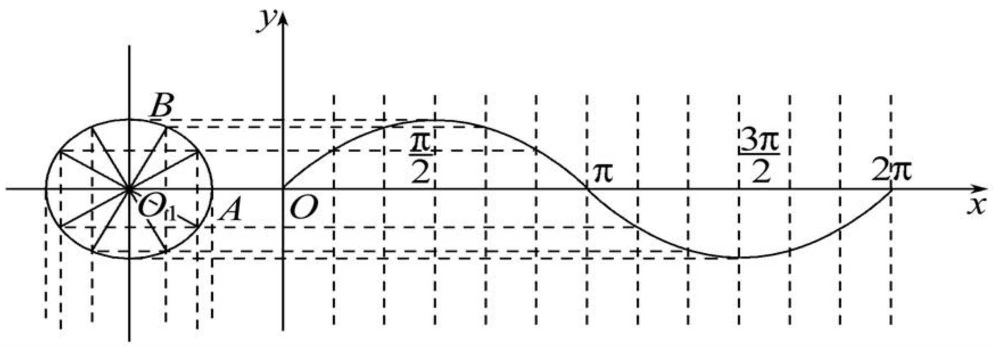
学情诊断·课堂测评

返回

课程标准	课时目标	
借助单位圆能画出三角函数的图象	必备知识	正弦函数、余弦函数的图象及应用
	关键能力	1.了解正弦函数、余弦函数的图象; 2.会用“五点法”画正弦函数、余弦函数的图象; 3.能利用正弦函数、余弦函数的图象解决简单问题
	学科素养	直观想象、逻辑推理、数学运算

教师专用 导学素材

在直角坐标系的x轴上任取一点O_1，以O_1为圆心作单位圆，从这个圆与x轴的交点A起把圆分成12等份，过圆上的各分点作x轴的垂线，可以得到对应于角0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，…，2π的正弦线，把角x的正弦线向右平行移动，使得正弦线的起点与x轴上相应的点x重合，再用光滑曲线把这些正弦线的终点连接起来．如图：



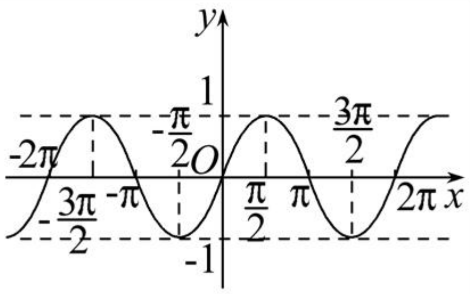
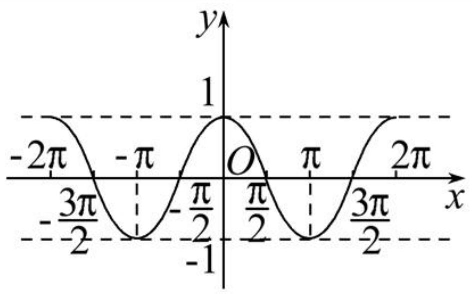
返回

【问题1】当正弦线的起点与x轴上相应的点x重合时，这些正弦线的终点的含义是什么？

【问题2】用光滑曲线把这些正弦线的终点连接起来得到的是正弦函数的图象吗？

【问题3】如何画出余弦函数在$x\in[0，2\pi]$上的图象？

正弦函数、余弦函数的图象

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
画法	五点法	

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
关键五点	$\underline{(0,\ 0)}$，$\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$，$\underline{(\pi,\ 0)}$，$\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right)$，$\underline{(2\pi,\ 0)}$	$(0,\ 1)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$，$(\pi,\ -1)$，$\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$，$(2\pi,\ 1)$
曲线	正(余)弦函数的<u>图象</u>叫做正(余)弦曲线	

教师专用 解透教材

正、余弦曲线

1．**本质：**正弦(余弦)曲线是正弦(余弦)函数的图形表示，是正弦(余弦)函数的一种直观表示．根据正弦(余弦)曲线，能帮助学生更直观地认识正弦(余弦)函数，进而推导正弦(余弦)函数的一些常用性质．

2．**混淆：**作正、余弦函数图象时，函数自变量一定要用弧度制，这样自变量的值为实数，任意角与x轴上的实数产生了一一对应关系，从而可以在平面直角坐标系中作出三角函数图象．

3．正弦、余弦曲线形状相同，位置不同，均向左右无限延伸，与x轴有无数个交点，正弦曲线关于原点对称，而余弦曲线关于y轴对称．

思考与交流

为什么把正弦、余弦曲线向左、右平移2π的整数倍个单位长度后图象形状不变？

提示： 由诱导公式一知 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$，$\cos(x+2k\pi)=\cos x$，$k\in\mathbf{Z}$ 可得.

自我小测

问题串串烧

1．正弦函数的图象向左右是无限伸展的吗？

2．函数$y=\cos x$的图象关于x轴对称吗？

3．把$y=\sin x$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位可得到$y=\cos x$的图象吗？

4．作正弦曲线时，选取的五个关键点是$(0，1)$，$\left(\frac{\pi}{2}，0\right)$，$(\pi，-1)$，$\left(\frac{3\pi}{2}，0\right)$，$(2\pi，1)$吗？

提示：1.是；2.不是；3.是；4.不是．

教材连连看

观察教材P199－P200图5.4－6与图5.4－7

(1)你能说出当$x\in[0，2\pi]$时，$y=\sin x$与$y=1+\sin x$，$y=\cos x$与$y=-\cos x$的图象有什么关系吗？

(2)怎样由$y=\sin x$的图象得到$y=1-\sin x$的图象？

提示：(1)把$y=\sin x$的图象向上平移1个单位长度，就可以得到$y=1+\sin x$的图象，作$y=\cos x$的图象关于x轴的对称图象，就得到$y=-\cos x$.

(2)先作$y=\sin x$关于x轴的对称图象，再向上平移1个单位长度，就可以得到$y=1-\sin x$的图象.

小题快快练

1．以下对于正弦函数$y=\sin x$的图象描述不正确的是(　　)

A．在$x\in[2k\pi, 2k\pi+2\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$上的图象形状相同，只是位置不同

B．关于x轴对称

C．介于直线$y=1$和$y=-1$之间

D．与y轴仅有一个交点

【解析】选B.观察$y=\sin x$的图象可知A，C，D正确，且关于原点中心对称.

2．用“五点法”画函数$y=1+\frac{1}{2}\sin x$的图象时，首先应描出五点的横坐标是(　　)

A．$0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$　　B．$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$

C．$0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$　　D．$0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}$

【解析】选B.所描出的五点的横坐标与函数$y=\sin x$的五点的横坐标相同，即$0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$.

基础类型一　正弦、余弦函数图象的初步认识(数学抽象)

1．下列叙述正确的个数为(　　)

①$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象关于点$P(\pi,0)$成中心对称；

②$y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图象关于直线$x=\pi$成轴对称；

③正弦、余弦函数的图象不超过直线$y=1$和$y=-1$所夹的范围.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【解析】选D.分别画出函数$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$和$y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的图象，由图象(略)观察可知①②③均正确.

2．在同一直角坐标系xOy中，函数$y=\sin x$与$y=-\sin x$的图象之间的关系是(　　)

A．关于x轴对称

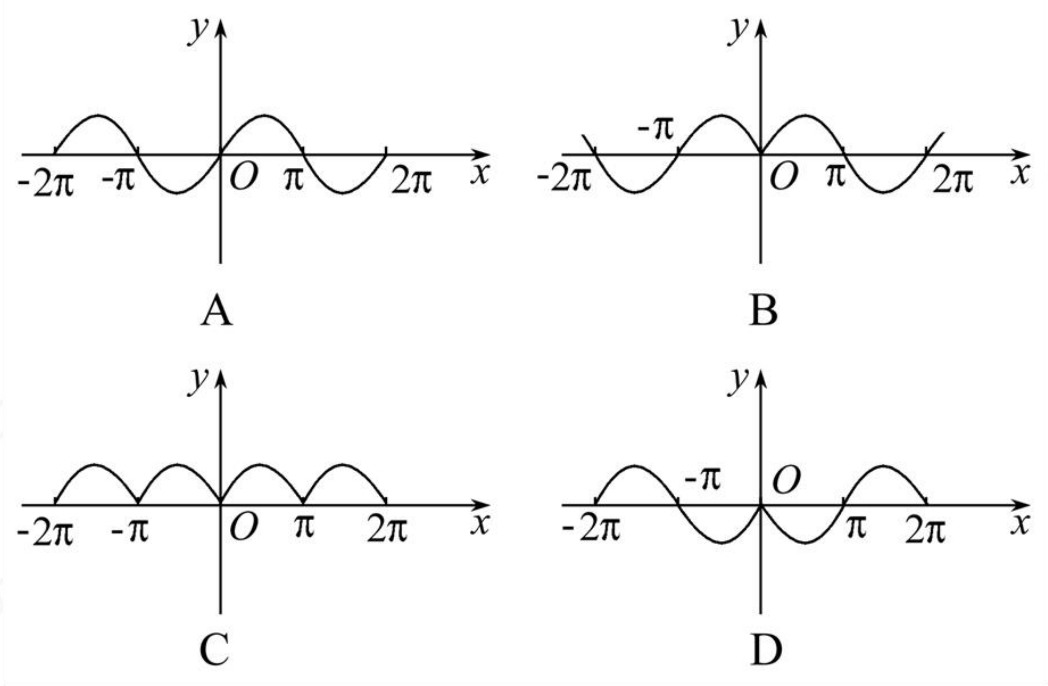
B．关于y轴对称

C．关于直线$y=x$对称

D．关于直线$y=-x$对称

【解析】选A.由于当自变量相同时，它们的函数值相反，故它们的图象关于x轴对称.

3．函数$y=\sin|x|$的图象是(　　)



【解析】选B.$y=\sin|x|=\begin{cases}\sin x, & x\geq 0,\\ -\sin x, & x<0,\end{cases}$

结合选项可知选B.

返回

■解题策略

正弦、余弦函数图象的关注点

(1)能画出正确的正弦曲线、余弦曲线，掌握两者的形状相同，只是在坐标系中的位置不同，可以通过相互平移得到.

(2)掌握常见的图象变换，如$-f(x)$，$f(-x)$，$f(|x|)$，$|f(x)|$等.

基础类型二　用“五点法”作三角函数的图象(直观想象)

【典例】用“五点法”作出下列函数的简图：

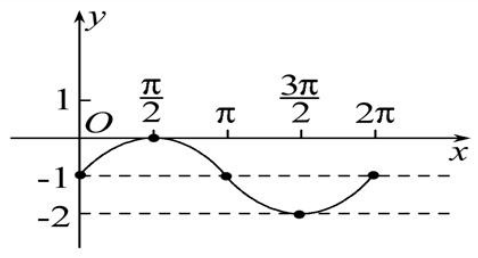
(1)$y=\sin x-1$，$x\in[0,2\pi]$；

(2)$y=-2\cos x+3$，$x\in[0,2\pi]$.

【解析】(1)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\sin x-1$	-1	0	-1	-2	-1

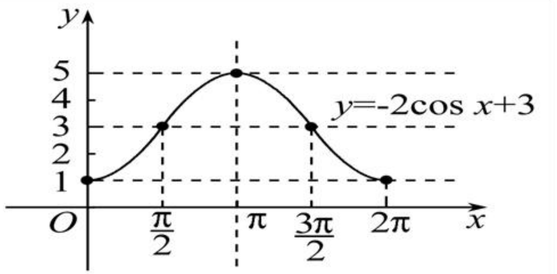
描点并将它们用光滑的曲线连接起来，如图.



(2)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-2\cos x$	-2	0	2	0	-2
$-2\cos x+3$	1	3	5	3	1

描点、连线得出函数$y=-2\cos x+3$，$x\in[0，2\pi]$的图象.



解题策略

作形如$y=a\sin x+b$(或$y=a\cos x+b$)，$x\in[0，2\pi]$的图象的三个步骤

列表	在$[0,2\pi]$内先分别找出确定所求函数图象的五个关键点；在表中列出相应的五点的坐标
↓	
描点	根据所列出的五个关键点的坐标，在坐标系中描出相应的点
↓	
连线	用光滑的曲线将所描出的五个关键点连接起来，便得到所求函数的图象

跟踪训练

用“五点法”作出下列函数的简图.

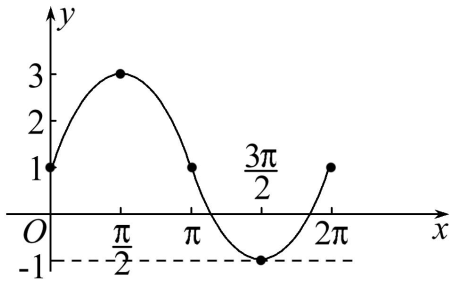
(1)$y=1+2\sin x$，$x\in[0，2\pi]$；

(2)$y=2+\cos x$，$x\in[0，2\pi]$.

【解析】(1)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	－1	0
$1+2\sin x$	1	3	1	－1	1

在直角坐标系中描出五点(0，1)，$\left(\frac{\pi}{2}，3\right)$，(π，1)，$\left(\frac{3\pi}{2}，-1\right)$，(2π，1)，然后用光滑曲线顺次连接起来，就得到$y=1+2\sin x$，$x\in[0，2\pi]$的图象.

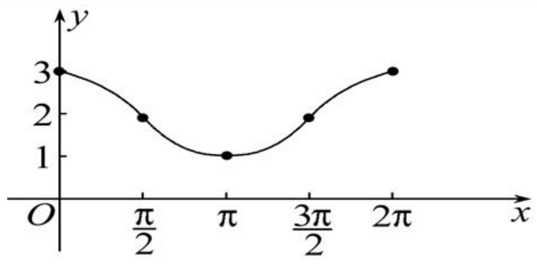


返回

(2)列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$2+\cos x$	3	2	1	2	3

描点连线，如图，



综合类型　正弦、余弦函数图象的应用(逻辑推理)

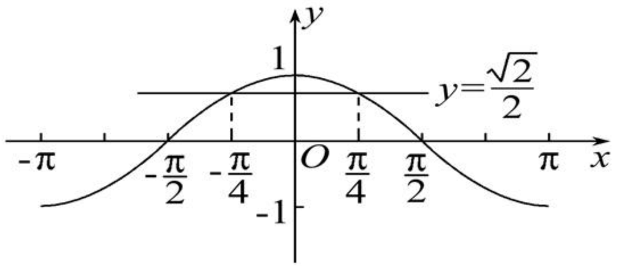
角度1　解不等式

【典例】函数$y=\sqrt{2\cos x-\sqrt{2}}$的定义域为________.

【解析】要使函数有意义，则 $2\cos x-\sqrt{2}\geq 0$，

所以 $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

画出 $y=\cos x$ 的图象及直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，如图，



由图象可知函数的定义域为$\{x|2k\pi-\frac{\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in\mathbf{Z}\}$.

答案：$\left\{x|2k\pi-\frac{\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}，k\in\mathbf{Z}\right\}$

返回

■解题策略

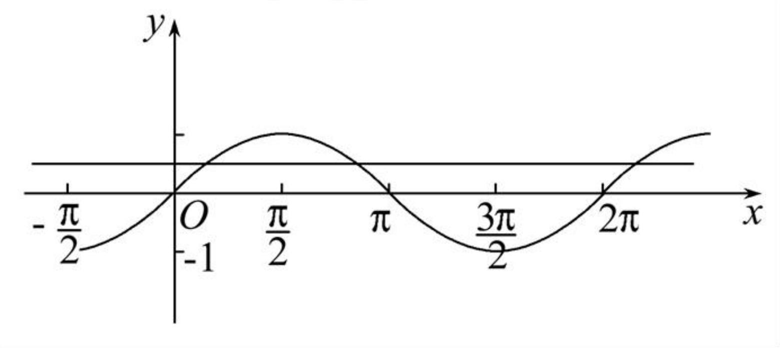
求三角函数的定义域时，一般要解三角不等式，其主要方法是借助于三角函数的图象或三角函数线，关键有两点：①选取合适的一个周期；②确定边界值.

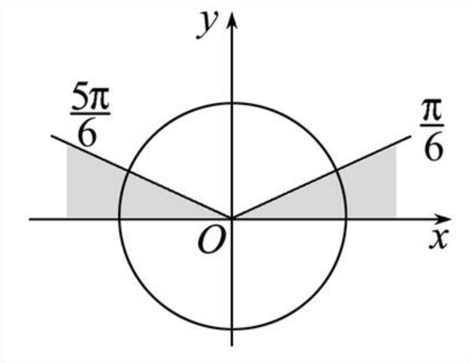
教师专用

【加固训练】 求函数 $y=\sqrt{\log_2\frac{1}{\sin x}-1}$ 的定义域.

【解析】为使函数有意义，需满足$\begin{cases}\log_2\frac{1}{\sin x}-1\geq 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\sin x\leq\frac{1}{2},\\ \sin x>0.\end{cases}$

正弦函数或单位圆如图所示：



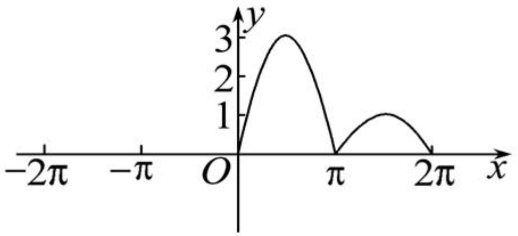


所以定义域为$\left\{x\middle|2k\pi<x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leq x<2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

角度2　零点问题

【典例】函数$f(x)=\sin x+2|\sin x|-k$，$x\in[0, 2\pi]$，有且仅有两个不同的零点，则k的取值范围是________.

【解析】本题可转化为函数$g(x)=\sin x+2|\sin x|$，$x\in[0, 2\pi]$的图象与直线$y=k$有且仅有两个不同的交点问题. $g(x)=\begin{cases}3\sin x, & 0\le x\le\pi, \\ -\sin x, & \pi<x\le 2\pi.\end{cases}$图象如图所示.



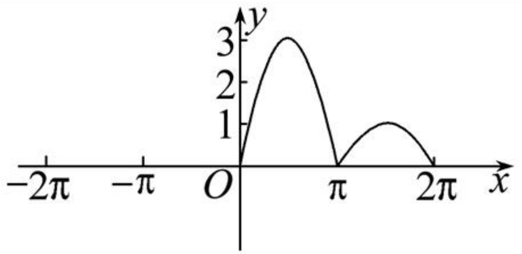
结合图象可知$1<k<3$.

答案：(1，3)

一题多变

本例若变为：函数$f(x)=\sin\ x+2|\sin\ x|$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象与直线$y=k$有四个不同的交点，则k的取值范围是________.

【解析】$f(x)=\begin{cases}3\sin x, & 0\le x\le\pi, \\ -\sin x, & \pi<x\le 2\pi.\end{cases}$ 图象如图所示.



结合图象可知 $0<k<1$.

答案：(0，1)

解题策略

关于函数零点、方程根的个数问题，往往运用数形结合的方法构造函数，转化为函数图象交点的个数问题来解决，体现了直观想象的核心素养.

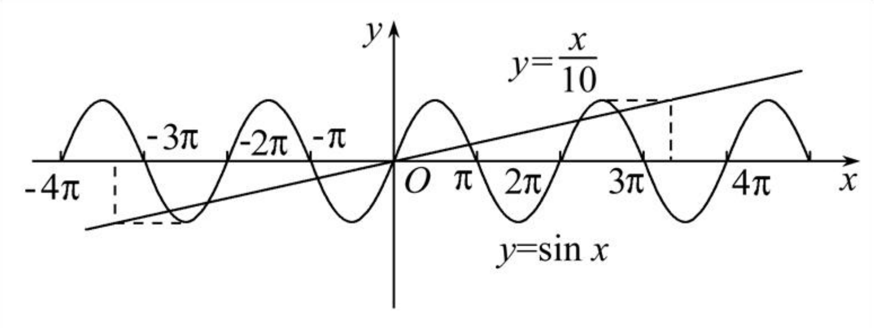
教师专用

【加固训练】

方程 $\sin x=\frac{x}{10}$ 的根的个数是(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【解析】选 A.在同一坐标系内画出 $y=\frac{x}{10}$ 和 $y=\sin x$ 的图象如图所示.



根据图象可知方程有 7 个根.

返回

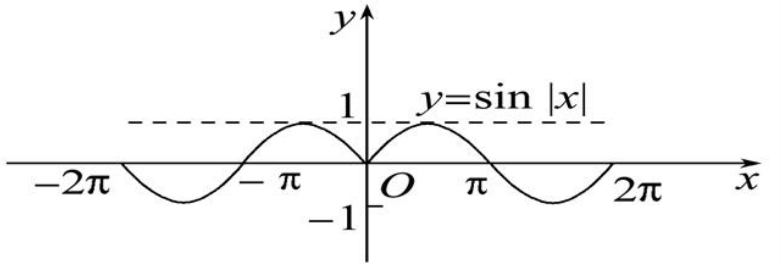
创新题型　三角方程解的问题(直观想象)

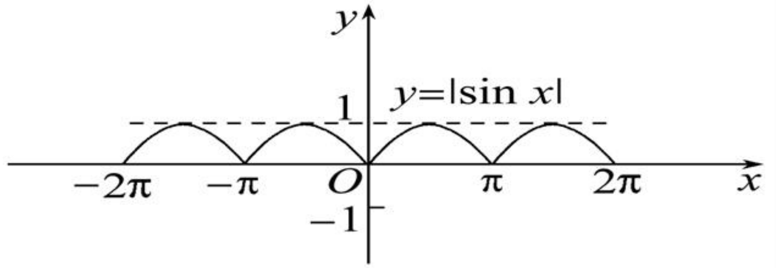
【典例】 已知集合$M=\{x|\sin|x|=1\}$，集合$N=\{x||\sin x|=1\}$，则M与N之间的关系是(　　)

A．$M\subsetneqq N$　　B．$M\supsetneqq N$

C．$M=N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

【解析】选A.画出$y=\sin|x|$及$y=|\sin x|$的图象如图.





当$x>0$时，$y=\sin|x|=\sin x=1$，

所以$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z},\ k\geq 0)$;

当$x\leq 0$时，满足条件的值为$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$，$k\leq 0$).

而令$y=|\sin x|=1$的x值为$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$)，

故$M\subsetneqq N$.

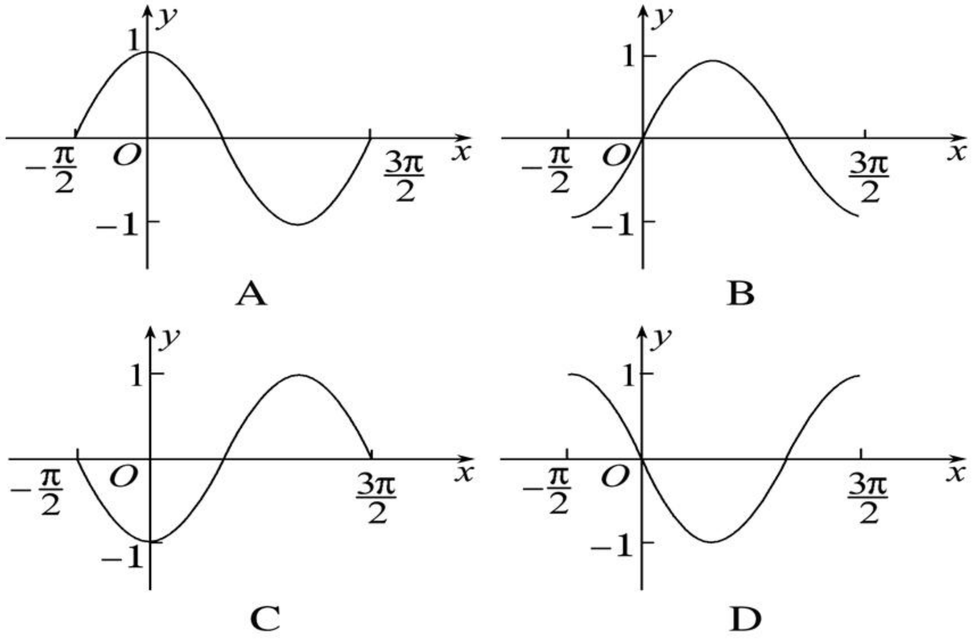
解题策略

三角方程的解的关注点

(1)解三角方程常常要借助三角函数的图象;

(2)三角方程的解不唯一.

1．函数$y=-\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$的简图是(　　)



【解析】选D.可以用特殊点来验证．当$x=0$时，$y=-\sin 0=0$，排除A，C；当$x=\frac{3\pi}{2}$时，$y=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$，排除B.

2．用“五点法”作函数y＝$2\sin 2x$的图象时，首先描出的五个点的横坐标是(　　)

A．0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π

B．0，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π

C．0，π，2π，3π，4π

D．0，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{2\pi}{3}$

【解析】选B.“五点法”作图是当2x＝0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π时x的值，此时x＝0，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{4}$，π.

3．在同一平面直角坐标系内，函数 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$与 $y=\sin x$，$x\in[2\pi,4\pi]$的图象(　　)

A．重合　　*B*．形状相同，位置不同

C．关于 y 轴对称　　*D*．形状不同，位置不同

【解析】选B.根据正弦曲线的作法可知函数$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$与$y=\sin x$，$x\in[2\pi,4\pi]$的图象只是位置不同，形状相同.

4．函数y＝$\sin x$，$x\in[0，2\pi]$的图象与直线$y=-\frac{1}{2}$的交点有________个．

【解析】在$[0，2\pi]$内使$\sin x=-\frac{1}{2}$的角x为$\frac{7\pi}{6}$和$\frac{11\pi}{6}$，

所以y＝$\sin x$，$x\in[0，2\pi]$的图象与直线$y=-\frac{1}{2}$有2个交点．

答案：2

5．函数$y=\cos x+4$，$x\in[0，2\pi]$的图象与直线$y=4$的交点的坐标为________.

【解析】由$\begin{cases}y=\cos x+4,\\ y=4\end{cases}$得$\cos x=0$，当$x\in[0，2\pi]$时，$x=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$，

所以交点坐标为$\left(\frac{\pi}{2}，4\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2}，4\right)$.

答案：$\left(\frac{\pi}{2}，4\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2}，4\right)$

“提纲式”PPT

正弦函数、余弦函数的图象

- **核心知识**
  - 正弦函数的图象
    - 几何法
    - 五点法
  - 余弦函数的图象
    - 平移法
    - 五点法
- **方法总结**
  - 利用五点法作图：（1）列表；（2）描点；（3）画图
- **易错提醒**
  - 正、余弦曲线形状相同，位置不同
- **核心素养**
  - 直观想象：通过正、余弦函数图象的运用，培养直观想象的核心素养

本课结束

更多精彩内容请登录：www. jb1000.com