复数的概念

【第一课时】

数系的扩充和复数的概念

教学重难点	教学目标	核心素养
复数的有关概念	了解数系的扩充过程，理解复数的概念	数学抽象
复数的分类	理解复数的分类	数学抽象
复数相等	掌握复数相等的充要条件及其应用	数学运算

【教学过程】

一、问题导入

预习教材内容，思考以下问题：

1．复数是如何定义的？其表示方法又是什么？

2．复数分为哪两大类？

3．复数相等的条件是什么？

二、新知探究

探究点 1：

复数的概念

例 1 下列命题：

①若 $a\in\mathbf{R}$，则（$a+1$）i 是纯虚数；

②若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则 $a+\mathrm{i}>b+\mathrm{i}$；

③若（x^2-4）+（x^2+3x+2）i 是纯虚数，则实数 $x=\pm2$；

④实数集是复数集的真子集．

其中正确的命题是（　　）

A．①　　　　B．②

C．③　　　　D．④

解析：对于复数 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时，为纯虚数．对于①，若 $a=-1$，则（$a+1$）i 不是纯虚数，即①错误；两个虚数不能比较大小，则②错误；对于③，若 $x=-2$，则 $x^2-4=0$，$x^2+3x+2=0$，此时（x^2-4）+（x^2+3x+2）$\mathrm{i}=0$ 不是纯虚数，则③错误；显然，④正确．故选 D．

答案：D

规律方法

判断与复数有关的命题是否正确的方法

（1）举反例：判断一个命题为假命题，只要举一个反例即可，所以解答这种类型的题时，可按照“先特殊，后一般，先否定，后肯定”的方法进行解答.

（2）化代数形式：对于复数实部、虚部的确定，不但要把复数化为 $a+b\mathrm{i}$ 的形式，更要注意这里 a，b 均为实数时，才能确定复数的实部、虚部.

提醒：解答复数概念题，一定要紧扣复数的定义，牢记 i 的性质.

探究点 2：

复数的分类

例 2 当实数 m 为何值时，复数 $z=\frac{m^2+m-6}{m}+(m^2-2m)\mathrm{i}$：（1）为实数？（2）为虚数？（3）为纯虚数？

解：（1）当 $\begin{cases} m^2-2m=0, \\ m\neq 0, \end{cases}$ 即 $m=2$ 时，复数 z 是实数.

（2）当 $m^2-2m\neq 0$ 且 $m\neq 0$，即 $m\neq 0$ 且 $m\neq 2$ 时，复数 z 是虚数.

（3）当 $\begin{cases} m\neq 0, \\ \frac{m^2+m-6}{m}=0, \\ m^2-2m\neq 0, \end{cases}$ 即 $m=-3$ 时，复数 z 是纯虚数.

规律方法

解决复数分类问题的方法与步骤

（1）化标准式：解题时一定要先看复数是否为 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的形式，以确定实部和虚部.

（2）定条件：复数的分类问题可以转化为复数的实部与虚部应该满足的条件问题，只需把复数化为代数形式，列出实部和虚部满足的方程（不等式）即可.

（3）下结论：设所给复数为 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$），

①z 为实数$\Leftrightarrow b=0$；

②z 为虚数$\Leftrightarrow b\neq 0$；

③z 为纯虚数$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$.

探究点 3：

复数相等

例 3 （1）（2019·浙江杭州期末考试）若 $z_1=-3-4\mathrm{i}$，$z_2=(n^2-3m-1)+(n^2-m-6)$

i（m，$n\in\mathbf{R}$），且 $z_1=z_2$，则 $m+n=$（　　）

A．4 或 0　　B．-4 或 0

C．2 或 0　　D．-2 或 0

（2）若 $\log_2(x^2-3x-2)+\mathrm{i}\log_2(x^2+2x+1)>1$，则实数 x 的值是________．

解析：（1）由 $z_1=z_2$，得 $n^2-3m-1=-3$ 且 $n^2-m-6=-4$，解得 $m=2$，$n=\pm2$，所以 $m+n=4$ 或 0，故选 A．

（2）因为 $\log_2(x^2-3x-2)+\mathrm{i}\log_2(x^2+2x+1)>1$，

所以 $\begin{cases}\log_2(x^2-3x-2)>1,\\ \log_2(x^2+2x+1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-3x-2>2,\\ x^2+2x+1=1,\end{cases}$ 解得 $x=-2$．

【答案：（1）A

（2）-2

规律方法

复数相等的充要条件

复数相等的充要条件是“化虚为实”的主要依据，多用来求解参数．解决复数相等问题的步骤是：分别分离出两个复数的实部和虚部，利用实部与实部相等、虚部与虚部相等列方程（组）求解．

注意：在两个复数相等的充要条件中，注意前提条件是 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，即当 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$ 时，$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$．若忽略前提条件，则结论不能成立．

三、课堂总结

1．复数的有关概念

（1）复数的定义

形如 $a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的数叫做复数，其中 i 叫做虚数单位，满足 $\mathrm{i}^2=\underline{-1}$．

（2）复数集

全体复数所构成的集合 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbf{R}\}$叫做复数集．

（3）复数的表示方法

复数通常用字母 z 表示，即 $\underline{z=a+b\mathrm{i}\ (a,b\in\mathbf{R})}$，其中 a 叫做复数 z 的实部，b 叫做复数 z 的虚部．

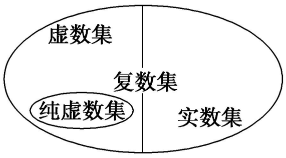
2．复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}|a,b\in\mathbf{R}\}$中任取两个数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），我们规定：$a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等当且仅当 $\underline{a=c}$ 且 $\underline{b=d}$．

3．复数的分类

（1）复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）$\begin{cases}\underline{\text{实数}}\ (b=0), \\ \underline{\text{虚数}}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}\ \underline{a=0}, \\ \text{非纯虚数}\ \underline{a\neq 0}\end{cases}\end{cases}$W.

（2）复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系



■名师点拨

复数 $b\mathrm{i}$（$b\in\mathbf{R}$）不一定是纯虚数，只有当 $b\neq 0$ 时，复数 $b\mathrm{i}$（$b\in\mathbf{R}$）才是纯虚数.

四、课堂检测

1．若复数 $z=a\mathrm{i}^2-b\mathrm{i}$（$a$，$b\in\mathbf{R}$）是纯虚数，则一定有（　　）

A．$b=0$　　　　B．$a=0$ 且 $b\neq 0$

C．$a=0$ 或 $b=0$　　　　D．$ab\neq 0$

解析：选 B．$z=a\mathrm{i}^2-b\mathrm{i}=-a-b\mathrm{i}$，由纯虚数的定义可得 $a=0$ 且 $b\neq 0$.

2．若复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)\mathrm{i}$ 为实数，则实数 m 的值为（　　）

A．-1　　　　B．2

C．1　　　　D．-1 或 2

解析：选 D．因为复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)\mathrm{i}$ 为实数，

所以 $m^2-m-2=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

3．若复数 $z=(m+1)+(m^2-9)\mathrm{i}<0$，则实数 m 的值等于____________.

解析：因为 $z<0$，所以 $\begin{cases}m^2-9=0, \\ m+1<0,\end{cases}$ 解得 $m=-3$.

答案：-3

4．已知 $\dfrac{x^2-x-6}{x+1}=(x^2-2x-3)\mathrm{i}$（$x\in\mathbf{R}$），则 $x=$________.

解析：因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\dfrac{x^2-x-6}{x+1}\in\mathbf{R}$，

由复数相等的条件得 $\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x+1}=0, \\ x^2-2x-3=0, \\ x+1\neq 0,\end{cases}$

解得 $x=3$.

答案：3

【第二课时】

复数的几何意义

教学重难点	教学目标	核心素养
复平面	了解复平面的概念	数学抽象
复数的几何意义	理解复数、复平面内的点、复平面内的向量之间的对应关系	直观想象
复数的模	掌握复数的模的概念，会求复数的模	数学运算
共轭复数	掌握共轭复数的概念，并会求一个复数的共轭复数	数学运算

【教学过程】

一、问题导入

预习教材内容，思考以下问题：

1．复平面是如何定义的？

2．复数与复平面内的点及向量的关系如何？复数的模是实数还是虚数？

3．复数 $z=a+bi$ 的共轭复数是什么？

二、新知探究

探究点1：

复数与复平面内的点

例1 已知复数 $z=(a^2-1)+(2a-1)i$，其中 $a\in\mathbf{R}$．当复数 z 在复平面内对应的点 Z 满足下列条件时，求 a 的值（或取值范围）．

（1）在实轴上；

（2）在第三象限．

解：（1）若 z 对应的点在实轴上，则有

$2a-1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$．

（2）若 z 对应的点在第三象限，则有

$\begin{cases}a^2-1<0,\\2a-1<0,\end{cases}$ 解得 $-1<a<\dfrac{1}{2}$．

故 a 的取值范围是 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$．

互动探究：

变条件：本例中复数 z 不变，若点 Z 在抛物线 $y^2=4x$ 上，求 a 的值．

解：若 z 对应的点 $(a^2-1,2a-1)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则有 $(2a-1)^2=4(a^2-1)$，即

$4a^2-4a+1=4a^2-4$，解得 $a=\frac{5}{4}$.

规律方法

利用复数与点的对应解题的步骤

（1）找对应关系：复数的几何表示法即复数 $z=a+b\text{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）可以用复平面内的点 Z（a，b）来表示，是解决此类问题的根据.

（2）列出方程：此类问题可建立复数的实部与虚部应满足的条件，通过解方程（组）或不等式（组）求解.

探究点 2：

复数与复平面内的向量

例 2 在复平面内，复数 i，1，4+2i 对应的点分别是 A，B，C. 求平行四边形 $ABCD$ 的顶点 D 所对应的复数.

解：法一：由复数的几何意义得 A（0，1），B（1，0），C（4，2），则 AC 的中点为 $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$，由平行四边形的性质知该点也是 BD 的中点，设 D（x，y），则 $\begin{cases}\frac{x+1}{2}=2,\\ \frac{y+0}{2}=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=3,\\ y=3,\end{cases}$ 即点 D 的坐标为（3，3），所以点 D 对应的复数为 3+3i.

法二：由已知得 $\overrightarrow{OA}=(0,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(4,2)$，

所以 $\overrightarrow{BA}=(-1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(3,2)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(2,3)$，所以 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=(3,3)$，

即点 D 对应的复数为 3+3i.

规律方法

复数与平面向量的对应关系

（1）根据复数与平面向量的对应关系，可知当平面向量的起点在原点时，向量的终点对应的复数即为向量对应的复数，反之复数对应的点确定后，从原点引出的指向该点的有向线段，即为复数对应的向量.

（2）解决复数与平面向量一一对应的问题时，一般以复数与复平面内的点一一对应为工具，实现复数、复平面内的点、向量之间的转化.

探究点 3：

复数的模

例 3 （1）设复数 $z_1=a+2\text{i}$，$z_2=-2+\text{i}$ 且 $|z_1|<|z_2|$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$-1<a<1$　　B．$a<-1$ 或 $a>1$

C．$a>1$　　D．$a>0$

（2）（2019·贵州遵义贵龙中学期中测试）已知复数 z 满足 $|z|^2-2|z|-3=0$，则复数 z 在复平面内对应点的集合是（　　）

A．1 个圆　　B．线段

C．2 个点　　D．2 个圆

解析：（1）由题意得 $\sqrt{a^2+2^2}<\sqrt{(-2)^2+1^2}$，即 $\sqrt{a^2+4}<\sqrt{5}$（$a\in\mathbf{R}$），所以 $-1<a<1$．

（2）由题意知（$|z|-3$）（$|z|+1$）$=0$，

即 $|z|=3$ 或 $|z|=-1$，

因为 $|z|\geq 0$，所以 $|z|=3$，

所以复数 z 在复平面内对应点的集合是 1 个圆．

答案：（1）A

（2）A

规律方法

求解复数的模的思路

解决复数的模的求解问题，应先把复数表示成标准的代数形式，再根据复数的模的定义求解．

三、课堂总结

1．复平面

建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴．实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数．

2．复数的两种几何意义

（1）复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）$\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$复平面内的点 $Z(a,b)$．

（2）复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）$\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$平面向量 $\overrightarrow{OZ}$．

3．复数的模

复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）对应的向量为 $\overrightarrow{OZ}$，则 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数 z 的模或绝对值，记作 $|z|$ 或 $|a+bi|$，即 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$．

4．共轭复数

（1）一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数．

（2）虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做共轭虚数．

（3）复数 z 的共轭复数用 $\overline{z}$ 表示，即如果 $z=a+bi$，那么 $\overline{z}=\underline{a-bi}$.

■名师点拨

复数 $z=a+bi$ 在复平面内对应的点为（a，b），复数 $\overline{z}=a-bi$ 在复平面内对应的点为（a，$-b$），所以两个互为共轭复数的复数，它们所对应的点关于 x 轴对称.

四、课堂检测

1．已知 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$（$m\in\mathbf{R}$）在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．（－3，1）　　　　B．（－1，3）

C．（1，＋∞）　　　　D．（－∞，－3）

解析：选 A．由题意得 $\begin{cases}m+3>0,\\ m-1<0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<1$.

2．在复平面内，O 为原点，向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $-1-2\mathrm{i}$，若点 A 关于实轴的对称点为 B，则向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为（　　）

A．$-2-\mathrm{i}$　　　　B．$2+\mathrm{i}$

C．$1+2\mathrm{i}$　　　　D．$-1+2\mathrm{i}$

解析：选 D．由题意可知，点 A 的坐标为（－1，－2），则点 B 的坐标为（－1，2），故向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $-1+2\mathrm{i}$.

3．已知 $0<a<2$，复数 z 的实部为 a，虚部为 1，则 $|z|$ 的取值范围是____________.

解析：依题意，可知 $z=a+\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$），则 $|z|^2=a^2+1$．因为 $0<a<2$，所以 $a^2+1\in(1,5)$，即 $|z|\in(1,\sqrt{5})$.

答案：$(1,\sqrt{5})$

4．若复数 $z_1=2+b\mathrm{i}$ 与复数 $z_2=a-4\mathrm{i}$ 互为共轭复数，则 $a=$________，$b=$________.

解析：因为 z_1 与 z_2 互为共轭复数，

所以 $a=2$，$b=4$.

答案：2　4