



4.4.2 对数函数的图象和性质

第1课时 对数函数的图象和性质

基础认知·自主学习 

能力形成·合作探究 

学情诊断·课堂测评 

《课程标准》

1. 能用描点法或借助计算工具画出具体的对数函数的图象
2. 探索并了解对数函数的单调性和特殊点，学会用函数的图象和代数运算的方法研究对数函数的性质
3. 理解对数函数所蕴含的运算规律
4. 知道对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数 ($a > 0$, 且 $a \neq 1$)

《课时目标》

- **必备知识** 1. 对数函数的图象和性质； 2. 反函数的定义.
- **关键能力** 1. 会利用对数函数的单调性比较大小；
2. 能利用对数函数的图象解决相关的问题.
- **学科素养** 数学抽象、直观想象、数学运算.

教师专用 导学素材

类比指数函数的图象和性质

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定义域	R	
值 域	$(0, +\infty)$	
性 质	(1) 过定点 $(0, 1)$, 即 $x=0$ 时, $y=1$	
	(2) 减函数	(2) 增函数

【问题 1】对数函数的图象是怎样的？是否也过定点？

【问题 2】对数函数的定义域、值域分别是什么？

【问题 3】对数函数有怎样的单调性？

世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用
供教师教学活动使用
违者必究

1. 对数函数的图象和性质

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定义域	$(0, +\infty)$	
值 域	\mathbf{R}	
性 质	(1)过定点 $(1, 0)$, 即 $x=1$ 时, <u>$y=0$</u>	
	(2) <u>减</u> 函数	(2) <u>增</u> 函数



教师专用 ▶ 解透教材

本质：利用作图工具，作出不同底数的对数函数在同一个坐标系中的图象，观察这些图象的位置、公共点和变化趋势，它们的共性即对数函数的性质。这也是研究函数图象性质的一般方法。

思考与交流

(1) 对于对数函数 $y = \log_a x$ ，为什么一定过点 $(1, 0)$ ？

提示： 当 $x=1$ 时， $\log_a 1 = 0$ 恒成立，即对数函数的图象一定过点 $(1, 0)$ 。

(2)在下表中，? 处 y 的范围是什么？

底数	x 的范围	y 的范围
$a > 1$	$x > 1$?
	$0 < x < 1$?
$0 < a < 1$	$x > 1$?
	$0 < x < 1$?



提示：

底数	x 的范围	y 的范围
$a > 1$	$x > 1$	$y > 0$
	$0 < x < 1$	$y < 0$
$0 < a < 1$	$x > 1$	$y < 0$
	$0 < x < 1$	$y > 0$



2.反函数

指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 互为反函数, 它们 定义域 与 值域 正好互换.

世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用
供教师教学活动使用
违者必究

思考与交流

函数 $y=\log_2x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 互为反函数吗？

提示：不是，同底数的指数函数与对数函数互为反函数.

自我小测

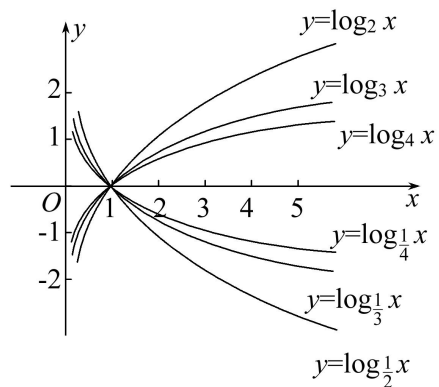
问题串串烧

1. 对数函数的图象都在 y 轴的右侧吗?
2. 若对数函数 $y=\log_{(a-1)}x$ 是减函数, 那么 a 的范围是什么?

提示: 1.是的; 2. $1 < a < 2$.

教材连连看

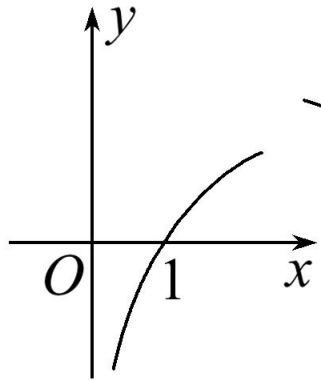
观察教材 P133 图 4.4-4，思考底数对图象位置有何影响？



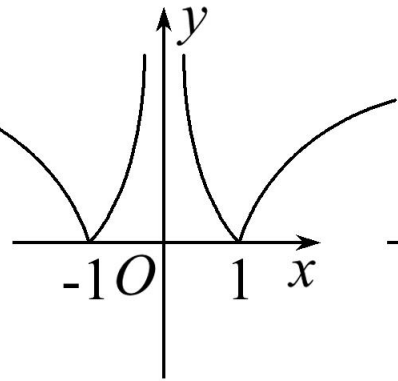
提示：在第一象限内，底数从小到大，图象从左往右。

■ 小题快快练

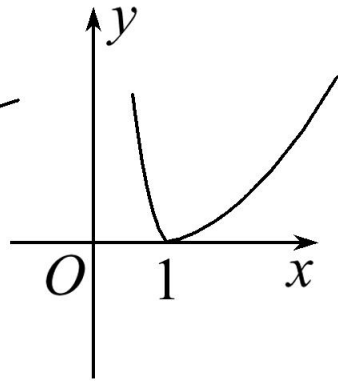
1. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是()



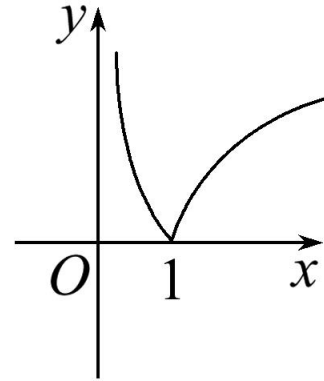
A



B



C



D

供教师教学活动使用



【解析】选 D. 因为 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x \geq 1, \\ -\log_2 x, & 0 < x < 1, \end{cases}$

则函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 即函数图象只出现在 y 轴右侧; 值域为 $(0, +\infty)$, 即函数图象只出现在 x 轴上方, 在区间 $(0, 1)$ 上递减的曲线, 在区间 $(1, +\infty)$ 上递增的曲线. 分析 A, B, C, D 四个答案, 只有 D 满足要求.



2. 设函数 $f(x)=\lg x$, 若 $f(2x)>f(2)$, 则实数 x 的取值范围是_____.

【解析】 函数 $f(x)=\lg x$, 则不等式 $f(2x)>f(2)$ 可化为 $\lg (2x)>\lg 2$, 即 $2x>2$, 解得 $x>1$,

所以实数 x 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

答案: $(1, +\infty)$



基础类型一 利用单调性比较大小(逻辑推理)

1. 已知 $a = \log_2 3.6$, $b = \log_4 3.2$, $c = \log_4 3.6$, 则()

A. $b < a < c$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

【解析】选 D. 因为函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $3.6 > 2$, 所以 $\log_2 3.6 > \log_2 2 = 1$, 因为函数 $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $3.2 < 3.6 < 4$, 所以 $\log_4 3.2 < \log_4 3.6 < \log_4 4 = 1$, 所以 $\log_4 3.2 < \log_4 3.6 < \log_2 3.6$, 即 $b < c < a$.

2. (2021·汕头高一检测)若 $a=\log_6 7$, $b=\log_7 6$, $c=\log_{\frac{6}{7}} \pi$, 则()

A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【解析】 选 C. $\log_6 7 > \log_6 6 = 1$, $0 = \log_7 1 < \log_7 6 < \log_7 7 = 1$, $\log_{\frac{6}{7}} \pi < \log_{\frac{6}{7}} 1 = 0$. 所以

$c < b < a$.

3. 已知 $a=0.3^{-0.2}$, $b=\log_{0.2}0.3$, $c=\log_{0.3}2$, 则()

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$ C. $b>c>a$ D. $c>b>a$

【解析】选 A. 因为 $0.3^{-0.2}>0.3^0=1$, 所以 $a>1$,

因为 $\log_{0.2}1<\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$, 所以 $0<b<1$,

因为 $\log_{0.3}2<\log_{0.3}1=0$, 所以 $c<0$, 所以 $a>b>c$.



■ 解题策略

比较对数值大小时常用的四种方法

- (1) 同底数的利用对数函数的单调性.
- (2) 同真数的利用对数函数的图象或用换底公式转化.
- (3) 底数和真数都不同, 找中间量.
- (4) 若底数为同一参数, 则根据底数对对数函数单调性的影响, 对底数进行分类讨论.

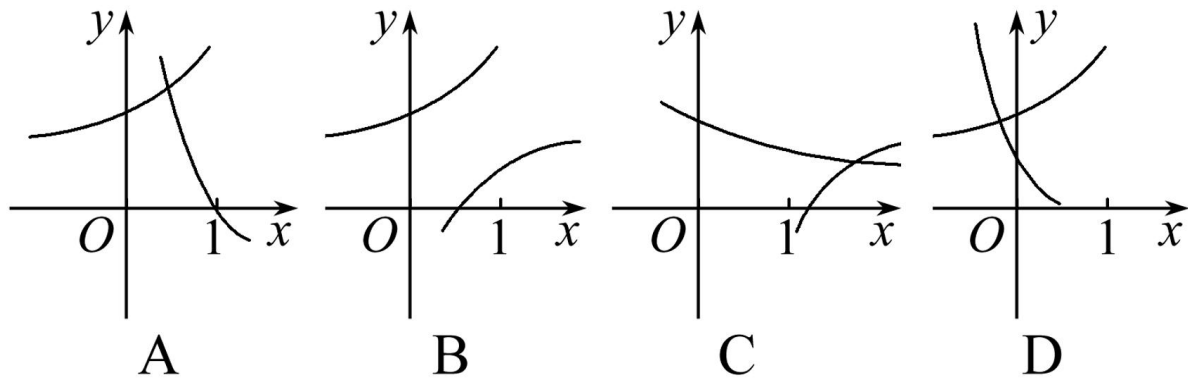


微提醒：对于不同底数的对数值，先利用单调性与 0 和 1 比较.

世纪金榜版权所有 供教师教学活动使用
禁止出版等商业所用 违者必究

基础类型二 对数函数的图象及应用(直观想象)

【典例】 1.(2021·广州高一检测)在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象可能是()



【解析】选 D. 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 是增函数, 过点 $(0, 1)$. $y = \log_a\left(x + \frac{1}{2}\right)$

是由函数 $y = \log_a x$ 向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到, 是减函数, 故选 D.

世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用



2. (2021·曲靖高一检测)函数 $y=\log_a(x-5)^2+1$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 恒过点_____.

【解析】 令 $(x-5)^2=1$ 得, $x=4$ 或 6 , 此时 $y=1$,

所以函数过定点 $(4, 1)$ 或 $(6, 1)$.

答案: $(4, 1)$ 或 $(6, 1)$

教师
专用

【备选例题】

如图所示, 曲线是对数函数 $f(x) = \log_a x$ 的图象, 已知 a 取 $\sqrt{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$, 则对应于

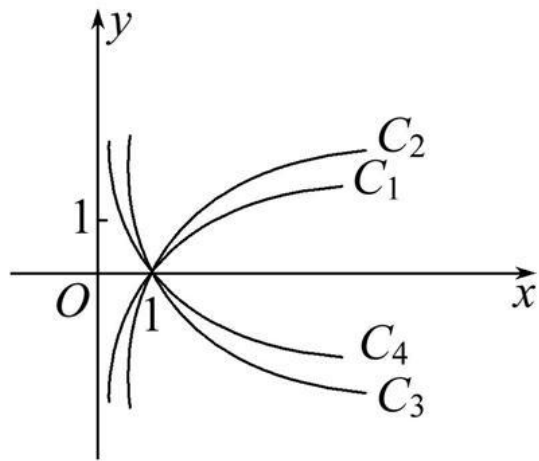
C_1, C_2, C_3, C_4 的 a 值依次为 ()

A. $\sqrt{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$

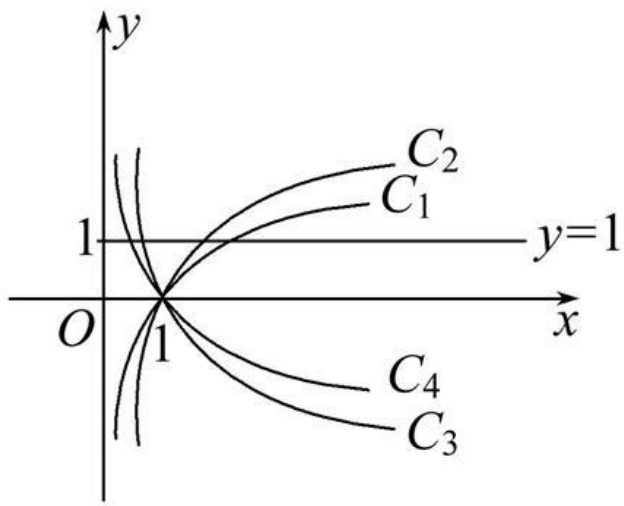
B. $\sqrt{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{3}, \sqrt{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$

D. $\frac{4}{3}, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$

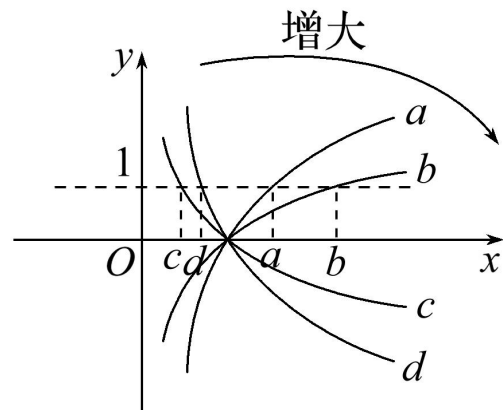


【解析】选 A. 在图象上画出 $y=1$ 的直线, 与各个曲线的交点的横坐标即为对应的对数函数的底数, 如图所示, 所以对应于 C_1, C_2, C_3, C_4 的 a 值依次为 $\sqrt{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$.



■ 解题策略

1. 对数函数底数对图象的影响



其中 a, b, c, d 是图象对应的对数函数的底数, 根据图象, 其大小关系为

$$0 < c < d < 1 < a < b.$$

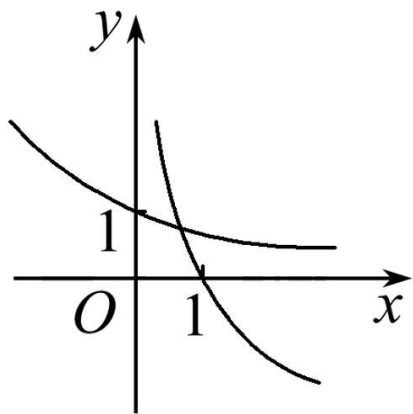
2. 关于定点问题

求函数 $y = m + \log_a f(x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象过定点时, 只需令 $f(x) = 1$ 求出 x , 即得定点为 (x, m) .

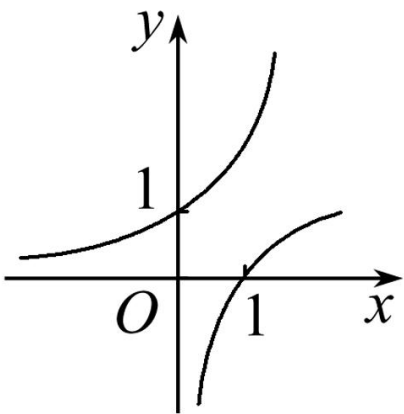
世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用
供教师教学活动使用
违者必究

◀◀◀ 跟踪训练 ▶▶▶

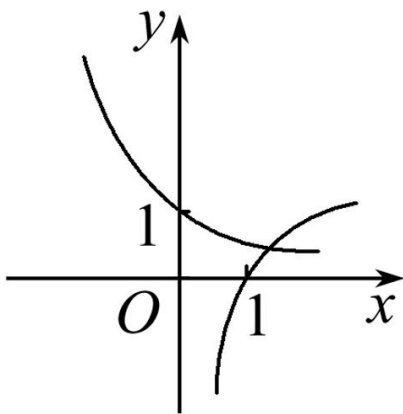
(多选题) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, $a \neq 1$, 则函数 $f(x) = a^x$ 与函数 $g(x) = -\log_b x$ 在同一坐标系中的图象可能是()



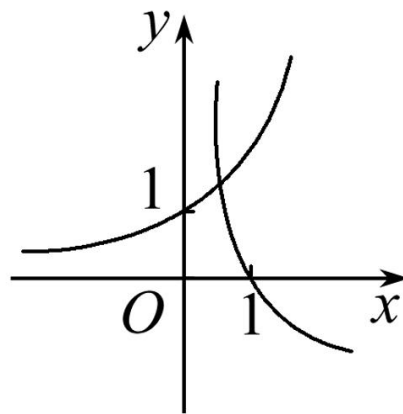
A



B



C



D

【解析】选 AB . 因为 $a > 0$, $b > 0$, 且 $ab = 1$, $a \neq 1$,

当 $a > 1$ 时, $0 < b < 1$, 所以 B 符合;

当 $0 < a < 1$ 时, $b > 1$, 所以 A 符合.

世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用
供教师教学活动使用
违者必究

教师
专用

【加固训练】

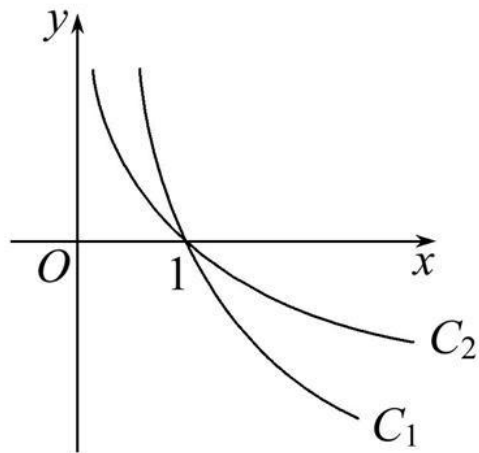
如图,若 C_1, C_2 分别为函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的图象,则()

A. $0 < a < b < 1$

B. $0 < b < a < 1$

C. $a > b > 1$

D. $b > a > 1$



【解析】选 B. 根据 C_1, C_2 分别为函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的图象, 可得 $0 < b < 1, 0 < a < 1,$

且 $b < a.$



综合类型 简单的值域问题(数学运算)

角度 1 根据单调性求值域

【典例】 函数 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ ($x \in [1, 2]$) 的值域为_____.

【解析】 因为 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 在各自定义域上均为增函数, 所以 $f(x) = 2^x + \log_2 x$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 故 $f(x) \in [2, 5]$.

答案: $[2, 5]$



■ 解题策略

关于利用单调性求值域

首先确定对数函数的单调性，再利用单调性确定取得最值时的自变量的值，分别代入后求出最值，进而得到值域.



角度2 利用函数的最值求参数的范围

题型比比看

(1) 已知函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 $[1, 4]$ 上的最大值与最小值的和是 2, 则 a 的值为_____.

【解析】 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $y = \log_a x$ 在 $[1, 4]$ 上最大值为 $\log_a 4$, 最小值为 $\log_a 1$; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 所以 $y = \log_a x$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值为 $\log_a 1$, 最小值为 $\log_a 4$. 故有 $\log_a 1 + \log_a 4 = 2$, 即 $\log_a 4 = 2, a^2 = 4, a = \pm 2$. 又 $a > 0$, 所以 $a = 2$.

答案: 2



(2) 已知函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $\{x | 2 \leq x \leq \pi\}$ 上的最大值比最小值大 1, 则底数 a 的值为()

A. $\frac{2}{\pi}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2}{\pi}$ 或 $\frac{\pi}{2}$

D. $2 - \pi$

世纪金榜版权所有
禁止出版等商业所用

供教师教学活动
违者必究



【解析】选 C. 当 $0 < a < 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[2, \pi]$ 上是减函数，

$$\text{故 } \log_a 2 - \log_a \pi = 1,$$

$$\text{故 } a = \frac{2}{\pi};$$

当 $a > 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[2, \pi]$ 上是增函数，

$$\text{故 } \log_a \pi - \log_a 2 = 1,$$

$$\text{故 } a = \frac{\pi}{2}.$$

点拨：当单调性不确定时，要分两种情况讨论。

■ 解题策略

关于求参数的值

- (1) 本质还是求值域，用参数把最值表示出来，根据条件确定参数的值即可.
- (2) 若底数中含有字母，需要对字母分大于 1，小于 1 大于 0 两种情况讨论.

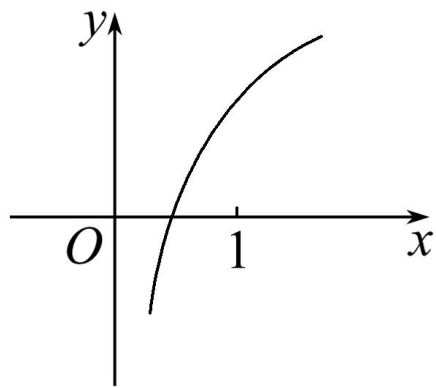
1. 已知 $m, n \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = m + \log_n x$ 的图象如图, 则 m, n 的取值范围分别是 ()

A. $m > 0, 0 < n < 1$

B. $m < 0, 0 < n < 1$

C. $m > 0, n > 1$

D. $m < 0, n > 1$



【解析】选 C. 由图象知函数为增函数, 故 $n > 1$.

又当 $x = 1$ 时, $f(x) = m > 0$, 故 $m > 0$.



2. 函数 $y=2+\log_5x(x\geq 1)$ 的值域为()

A. $(2, +\infty)$

B. $(-\infty, 2)$

C. $[2, +\infty)$

D. $[3, +\infty)$

【解析】选 C. 由 $x\geq 1$ 知 $\log_5x\geq 0$, $y\geq 2$, 值域是 $[2, +\infty)$.

3. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+2)$, 若其图象过点 $(6, 3)$, 则 $f(2)$ 的值为()

- A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【解析】 选 B. 由题意得 $3 = \log_a 8$,

所以 $a^3 = 8$, 所以 $a = 2$.

所以 $f(x) = \log_2(x+2)$, 所以 $f(2) = \log_2 4 = 2$.



4. 函数 $y=\log_3x$ 与 $y=\log\frac{1}{3}x$ 的图象关于_____对称.

【解析】 函数 $y=\log_3x$ 与 $y=\log\frac{1}{3}x$ 的图象关于 x 轴对称.

答案: x 轴



5. 已知指数函数的图象过点(2, 4), 则其反函数为_____.

【解析】 设指数函数 $y=a^x$, $a>0$ 且 $a\neq 1$;

其图象过点(2, 4), 所以 $a^2=4$, 解得 $a=2$;

所以函数 $y=2^x$, $x\in\mathbf{R}$;

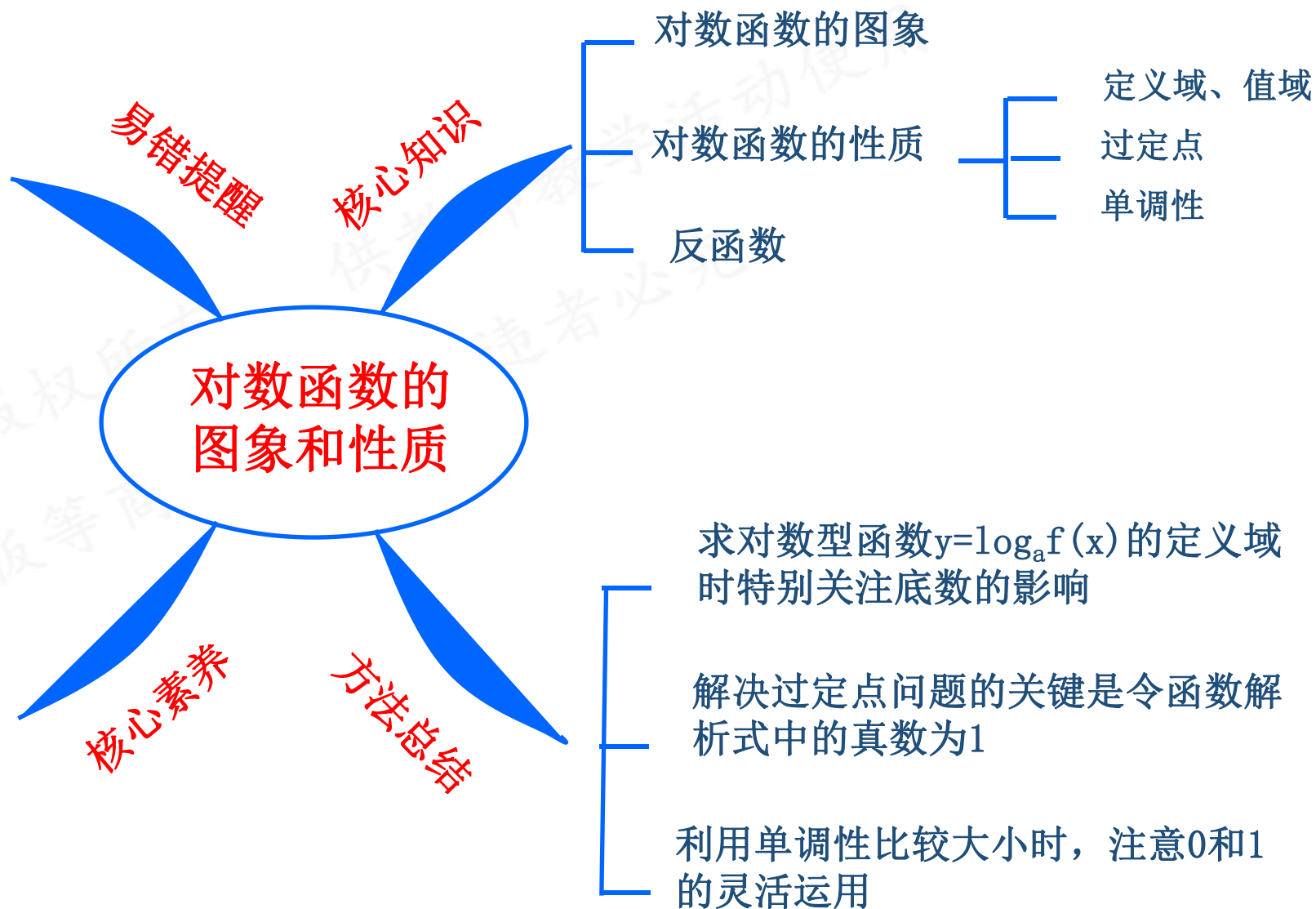
所以它的反函数是 $y=\log_2x$, $x\in(0, +\infty)$.

答案: $y=\log_2x$, $x\in(0, +\infty)$

单调性的应用中注意不等符号的选择

直观想象：通过对数函数图象的应用，培养直观想象的核心素养

逻辑推理：通过单调性的应用，培养逻辑推理的核心素养





本课结束

更多精彩内容请登录：www.jb1000.com