简单几何体的表面积与体积

【第一课时】

【教学目标】

1．了解柱体、锥体、台体的侧面展开图，掌握柱体、柱、锥、台的体积

2．能利用柱体、锥体、台体的体积公式求体积，理解柱体、锥体、台体的体积之间的关系

【教学重难点】

1．柱、锥、台的表面积

2．锥体、台体的表面积的求法

【教学过程】

一、问题导入

预习教材内容，思考以下问题：

1．棱柱、棱锥、棱台的表面积如何计算？

2．圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图分别是什么？

3．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式是什么？

4．柱体、锥体、台体的体积公式分别是什么？

5．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式、体积公式之间分别有怎样的关系？

二、新知探究

探究点1

柱、锥、台的表面积

例1：（1）若圆锥的正视图是正三角形，则它的侧面积是底面积的（　　）

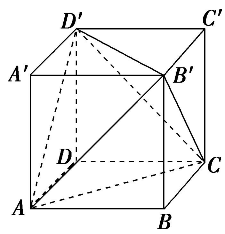
A.$\sqrt{2}$倍

B．3 倍

C．2 倍

D．5 倍

（2）已知正方体的 8 个顶点中，有 4 个为侧面是等边三角形的三棱锥的顶点，则这个三棱锥与正方体的表面积之比为（　　）



A．$1∶\sqrt{2}$

B．$1∶\sqrt{3}$

C．$2:\sqrt{2}$

D．$3:\sqrt{6}$

（3）已知某圆台的一个底面周长是另一个底面周长的 3 倍，母线长为 3，圆台的侧面积为 84π，则该圆台较小底面的半径为（　　）

A．7

B．6

C．5

D．3

【解析】（1）设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则由题意可知，$l=2r$，于是 $S_{侧}=\pi r\cdot 2r=2\pi r^2$，$S_{底}=\pi r^2$，可知选 C.

（2）棱锥 B'-ACD'为适合条件的棱锥，四个面为全等的等边三角形，设正方体的棱长为 1，则 $B'C=\sqrt{2}$，$S_{\triangle B'AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

三棱锥的表面积 $S_{锥}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

又正方体的表面积 $S_{正}=6$.

因此 $S_{锥}:S_{正}=2\sqrt{3}:6=1:\sqrt{3}$.

（3）设圆台较小底面的半径为 r，则另一底面的半径为 $3r$.由 $S_{侧}=3\pi(r+3r)=84\pi$，解得 $r=7$.

【答案】（1）C

（2）B

（3）A

[规律方法]

空间几何体表面积的求法技巧

（1）多面体的表面积是各个面的面积之和.

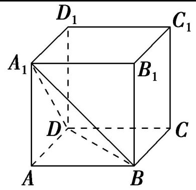
（2）组合体的表面积应注意重合部分的处理.

（3）圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面，计算侧面积时需要将这个曲面展开为平面图形计算，而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

探究点2

柱、锥、台的体积

例 2：如图所示，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，过顶点 B，D，A_1 截下一个三棱锥.



（1）求剩余部分的体积；

（2）求三棱锥 $A\text{-}A_1BD$ 的体积及高.

【解】（1）V三棱锥 $A_1\text{-}ABD=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot A_1A$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot A_1A=\frac{1}{6}a^3$.

故剩余部分的体积

$V=V_{\text{正方体}}-V$三棱锥 $A_1\text{-}ABD=a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3$.

（2）V三棱锥 $A\text{-}A_1BD=V$三棱锥 $A_1\text{-}ABD=\frac{1}{6}a^3$.

设三棱锥 $A\text{-}A_1BD$ 的高为 h，

则 V三棱锥 $A\text{-}A_1BD=\frac{1}{3}\cdot S\triangle A_1BD\cdot h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$（$\sqrt{2}a$）$^2h=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h$，

故 $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h=\frac{1}{6}a^3$，

解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

[规律方法]

求几何体体积的常用方法

（1）公式法：直接代入公式求解.

（2）等积法：例如四面体的任何一个面都可以作为底面，只需选用底面积和高都易求的形式即可.

（3）补体法：将几何体补成易求解的几何体，如棱锥补成棱柱，棱台补成棱锥等.

（4）分割法：将几何体分割成易求解的几部分，分别求体积.

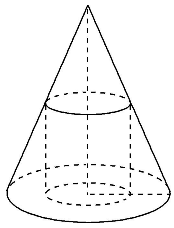
[提醒]求几何体的体积时，要注意利用好几何体的轴截面（尤其为圆柱、圆锥时），准确求出几何体的高和底面积.

探究点3

组合体的表面积和体积

例3：如图在底面半径为 2，母线长为 4 的圆锥中内接一个高为$\sqrt{3}$的圆柱，

求圆柱的表面积.

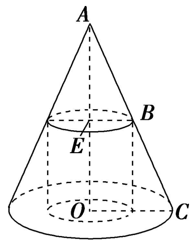


【解】设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，表面积为 S.

则 $R=OC=2$，$AC=4$，

$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

如图所示，



易知$\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，

所以$\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{EB}{OC}$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{2}$，所以 $r=1$，

$S_{底}=2\pi r^2=2\pi$，$S_{侧}=2\pi r\cdot h=2\sqrt{3}\pi$.

所以 $S=S_{底}+S_{侧}=2\pi+2\sqrt{3}\pi$

$=(2+2\sqrt{3})\pi$.

互动探究

1．[变问法]本例中的条件不变，求圆柱的体积与圆锥的体积之比.

解：由例题解析可知：圆柱的底面半径为 $r=1$，高 $h=\sqrt{3}$，所以圆柱的体积 $V_1=\pi r^2h=\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$.

圆锥的体积 $V_2=\dfrac{1}{3}\pi\times2^2\times2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\pi$.

所以圆柱与圆锥的体积比为 3∶8.

2．[变问法]本例中的条件不变，求图中圆台的表面积与体积.

解：由例题解析可知：圆台的上底面半径 $r=1$，下底面半径 $R=2$，高 $h=\sqrt{3}$，母线 $l=2$，所以圆台的表面积 $S=\pi(r^2+R^2+r\cdot l+Rl)=\pi(1^2+2^2+1\times2+2\times2)=11\pi$.

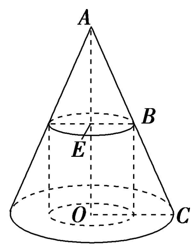
圆台的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi(r^2+rR+R^2)h=\dfrac{1}{3}\pi(1^2+2+2^2)\times\sqrt{3}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\pi$.

3．[变条件、变问法]本例中的“高为$\sqrt{3}$”改为“高为 h”，试求圆柱侧面积的最大值.

解：设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，

则 $R=OC=2$，$AC=4$，

$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.



如图所示易知$\triangle AEB \backsim \triangle AOC$，

所以$\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{EB}{OC}$，

即$\dfrac{2\sqrt{3}-h}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{2}$，

所以 $h=2\sqrt{3}-\sqrt{3}r$，

$S_{圆柱侧}=2\pi rh=2\pi r(2\sqrt{3}-\sqrt{3}r)$

$=-2\sqrt{3}\pi r^2+4\sqrt{3}\pi r$，

所以当 $r=1$，$h=\sqrt{3}$时，圆柱的侧面积最大，其最大值为 $2\sqrt{3}\pi$.

[规律方法]

求组合体的表面积与体积的步骤

（1）分析结构特征：弄清组合体的组成形式，找准有关简单几何体的关键量.

（2）设计计算方法：根据组成形式，设计计算方法，特别要注意“拼接面”面积的处理，利用“切割”“补形”的方法求体积.

（3）计算求值：根据设计的计算方法求值.

【课堂总结】

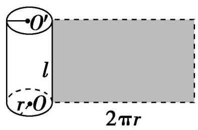
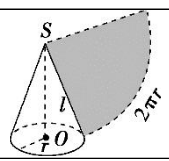
1．棱柱、棱锥、棱台的表面积

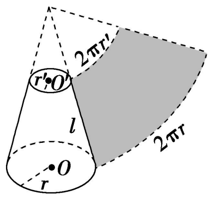
多面体的表面积就是围成多面体各个面的面积的和．棱柱、棱锥、棱台的表面积就是围成它们的各个面的面积的和.

2．棱柱、棱锥、棱台的体积

（1）$V_{棱柱}=\underline{Sh}$；（2）$V_{棱锥}=\underline{\dfrac{1}{3}Sh}$；$V_{棱台}=\underline{\dfrac{1}{3}h(S'+\sqrt{SS'}+S)}$，其中 S'，S 分别是棱台的上、下底面面积，h 为棱台的高.

3．圆柱、圆锥、圆台的表面积和体积

名称	图形	公式
圆柱		底面积：$S_{底}=\underline{\pi r^2}$ 侧面积：$S_{侧}=\underline{2\pi rl}$ 表面积：$S=\underline{2\pi rl+2\pi r^2}$ 体积：$V=\underline{\pi r^2 l}$
圆锥		底面积：$S_{底}=\underline{\pi r^2}$ 侧面积：$S_{侧}=\underline{\pi rl}$

		表面积：$S=\underline{\pi rl+\pi r^2}$ 体积：$V=\underline{\frac{1}{3}\pi r^2h}$
圆台		上底面面积：$S_{上底}=\underline{\pi r'^2}$ 下底面面积：$S_{下底}=\underline{\pi r^2}$ 侧面积：$S_{侧}=\underline{\pi l(r+r')}$ 表面积： $S=\underline{\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)}$ 体积： $V=\underline{\frac{1}{3}\pi h(r'^2+r'r+r^2)}$

[名师点拨]

1．柱体、锥体、台体的体积

（1）柱体：柱体的底面面积为 S，高为 h，则 $V=Sh$.

（2）锥体：锥体的底面面积为 S，高为 h，则 $V=\frac{1}{3}Sh$.

（3）台体：台体的上、下底面面积分别为 S'、S，高为 h，则 $V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{SS'}+S)h$.

2．圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式之间的关系

$S_{圆柱侧}=2\pi rl\xrightarrow{r'=r}S_{圆台侧}=\pi(r'+r)l\xrightarrow{r'=0}S_{圆锥侧}=\pi rl$.

3．柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系

$V_{柱体}=Sh\xrightarrow{S'=S}V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h\xrightarrow{S'=0}V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$.

【课堂检测】

1．已知某长方体同一顶点上的三条棱长分别为 1，2，3，则该长方体的表面积为（　　）

A．22　　B．20

C．10　　D．11

解析：选 A.所求长方体的表面积 $S=2\times(1\times2)+2\times(1\times3)+2\times(2\times3)=22$.

2．正三棱锥的高为 3，侧棱长为 $2\sqrt{3}$，则这个正三棱锥的体积为（　　）

A.$\frac{27}{4}$　　B.$\frac{9}{4}$

C.$\frac{27\sqrt{3}}{4}$　　D.$\frac{9\sqrt{3}}{4}$

解析：选 D.由题意可得底面正三角形的边长为 3，所以 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times3^2\times3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.故选 D.

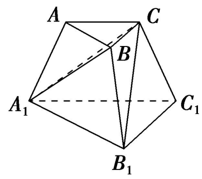
3．已知圆台的上、下底面的面积之比为 9∶25，那么它的中截面截得的上、下两台体的侧面积之比是________.

解析：圆台的上、下底面半径之比为 3∶5，设上、下底面半径为 $3x$，$5x$，则中截面半径为 $4x$，设上台体的母线长为 l，

则下台体的母线长也为 l，上台体侧面积 $S_1=\pi(3x+4x)l=7\pi xl$，下台体侧面积 $S_2=\pi(4x+5x)l=9\pi xl$，所以 $S_1∶S_2=7∶9$.

答案：7∶9

4.如图，三棱台 $ABC\quad A_1B_1C_1$ 中，$AB∶A_1B_1=1∶2$，求三棱锥 $A_1\quad ABC$，三棱锥 $B\quad A_1B_1C$，三棱锥 $C\quad A_1B_1C_1$ 的体积之比.



解：设棱台的高为 h，$S_{\triangle ABC}=S$，则 $S\triangle A_1B_1C_1=4S$.

所以 $VA_1\quad ABC=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}Sh$，

$VC\quad A_1B_1C_1=\frac{1}{3}S\triangle A_1B_1C_1\cdot h=\frac{4}{3}Sh$.

又 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+4S+2S)=\frac{7}{3}Sh$，

所以 $VB\quad A_1B_1C=V_{台}-VA_1\quad ABC-VC\quad A_1B_1C_1$

$=\frac{7}{3}Sh-\frac{Sh}{3}-\frac{4Sh}{3}=\frac{2}{3}Sh$，

所以体积比为 1∶2∶4.

【第二课时】

【教学目标】

1．记准球的表面积和体积公式，会计算球的表面积和体积

2．能解决与球有关的组合体的计算问题

【教学重难点】

1．球的表面积与体积

2．与球有关的组合体

【教学过程】

一、问题导入

预习教材内容，思考以下问题：

1．球的表面积公式是什么？

2．球的体积公式什么？

二、新知探究

探究点1

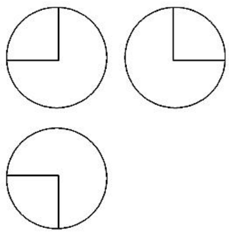
球的表面积与体积

例1：（1）已知球的体积是$\frac{32\pi}{3}$，则此球的表面积是（　　）

A．12π　　B．16π

C.$\frac{16\pi}{3}$　　D.$\frac{64\pi}{3}$

（2）如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径，若该几何体的体积是$\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　　）



A．17π　　B．18π

C．20π　　D．28π

【解析】（1）设球的半径为R，则由已知得

$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$，解得$R=2$.

所以球的表面积$S=4\pi R^2=16\pi$.

（2）由三视图可得此几何体为一个球切割掉$\frac{1}{8}$后剩下的几何体，

设球的半径为r，

故$\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{28}{3}\pi$，

所以$r=2$，表面积$S=\frac{7}{8}\times4\pi r^2+\frac{3}{4}\pi r^2=17\pi$，选A.

【答案】（1）B（2）A

[归纳反思]

球的体积与表面积的求法及注意事项

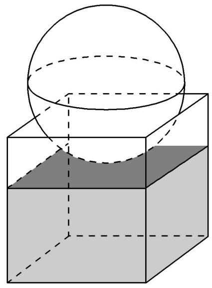
（1）要求球的体积或表面积，必须知道半径R或者通过条件能求出半径R，然后代入体积或表面积公式求解．

（2）半径和球心是球的最关键要素，把握住了这两点，计算球的表面积或体积的相关题目也就易如反掌了．

探究点2

球的截面问题

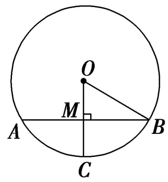
例2：如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高8 cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为6 cm，如果不计容器厚度，则球的体积为（　　）



A.$\frac{500\pi}{3}$ cm^3　　B.$\frac{866\pi}{3}$ cm^3

C.$\frac{1\ 372\pi}{3}$ cm^3　　D.$\frac{2\ 048\pi}{3}$ cm^3

【解析】如图，作出球的一个截面，则 $MC=8-6=2$（cm），$BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$（cm）．



设球的半径为 R cm，则

$R^2=OM^2+MB^2$

$=(R-2)^2+4^2$，

所以 $R=5$，

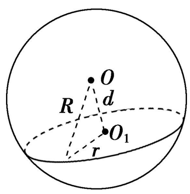
所以 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500}{3}\pi$　（cm^3）．

【答案】A

[规律方法]

球的截面问题的解题技巧

（1）有关球的截面问题，常画出过球心的截面圆，将问题转化为平面中圆的问题．



（2）解题时要注意借助球半径 R，截面圆半径 r，球心到截面的距离 d 构成的直角三角形，即 $R^2=d^2+r^2$．

探究点3

与球有关的切、接问题

角度一球的外切正方体问题

例3：将棱长为 2 的正方体木块削成一个体积最大的球，则该球的体积为（　　）

A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

【解析】由题意知，此球是正方体的内切球，根据其几何特征知，此球的直径与正方体的棱长是相等的，故可得球的直径为 2，故半径为 1，其体积是$\frac{4}{3}\times\pi\times1^3=\frac{4\pi}{3}$.

【答案】A

角度二球的内接长方体问题

例 4：一个长方体的各个顶点均在同一球的球面上，且一个顶点上的三条棱的长分别为 1，2，3，则此球的表面积为________.

【解析】长方体外接球直径长等于长方体体对角线长，即 $2R=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$，

所以球的表面积 $S=4\pi R^2=14\pi$.

【答案】14π

角度三球的内接正四面体问题

例 5：若棱长为 a 的正四面体的各个顶点都在半径为 R 的球面上，求球的表面积.

【解】把正四面体放在正方体中，设正方体棱长为 x，则 $a=\sqrt{2}x$，由题意 $2R=\sqrt{3}x=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}a}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，

所以 $S_{球}=4\pi R^2=\frac{3}{2}\pi a^2$.

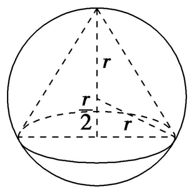
角度四球的内接圆锥问题

例 6：球的一个内接圆锥满足：球心到该圆锥底面的距离是球半径的一半，则该圆锥的体积和此球体积的比值为________.

【解析】①当圆锥顶点与底面在球心两侧时，如图所示，设球半径为 r，则球心到该圆锥底面的距离是$\frac{r}{2}$，于是圆锥的底面半径为 $\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}r}{2}$，

高为$\frac{3r}{2}$.

该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2\times\frac{3r}{2}=\frac{3}{8}\pi r^3$，球体积为$\frac{4}{3}\pi r^3$，所以



该圆锥的体积和此球体积的比值为$\dfrac{\frac{3}{8}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\dfrac{9}{32}$.

②同理，当圆锥顶点与底面在球心同侧时，该圆锥的体积和此球体积的比值为$\dfrac{3}{32}$.

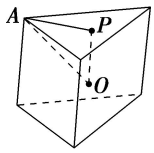
【答案】$\dfrac{9}{32}$或$\dfrac{3}{32}$

角度五球的内接直棱柱问题

例 7：设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 a，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A．πa^2　　　　B.$\dfrac{7}{3}\pi a^2$

C.$\dfrac{11}{3}\pi a^2$　　　　D．$5\pi a^2$



【解析】由题意知，该三棱柱为正三棱柱，且侧棱与底面边长相等，均为 a. 如图，P 为三棱柱上底面的中心，O 为球心，易知 $AP=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$OP=\dfrac{1}{2}a$，所以球的半径 $R=OA$ 满足 $R^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}a\right)^2=\dfrac{7}{12}a^2$，故 $S_{球}=4\pi R^2=\dfrac{7}{3}\pi a^2$.

【答案】B

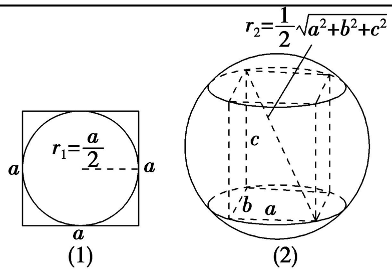
[规律方法]

（1）正方体的内切球

球与正方体的六个面都相切，称球为正方体的内切球，此时球的半径为 $r_1=\dfrac{a}{2}$，过在一个平面上的四个切点作截面如图（1）.

（2）长方体的外接球

长方体的八个顶点都在球面上，称球为长方体的外接球，根据球的定义可知，长方体的体对角线是球的直径，若长方体过同一顶点的三条棱长为 a，b，c，过球心作长方体的对角线，则球的半径为 $r_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，如图（2）.



（3）正四面体的外接球

正四面体的棱长 a 与外接球半径 R 的关系为：$2R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

【课堂总结】

1．球的表面积

设球的半径为 R，则球的表面积 $S=4\pi R^2$.

2．球的体积

设球的半径为 R，则球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

[名师点拨]

对球的体积和表面积的几点认识

（1）从公式看，球的表面积和体积的大小，只与球的半径相关，给定 R 都有唯一确定的 S 和 V 与之对应，故表面积和体积是关于 R 的函数.

（2）由于球的表面不能展开成平面，所以，球的表面积公式的推导与前面所学的多面体与旋转体的表面积公式的推导方法是不一样的.

（3）球的表面积恰好是球的大圆（过球心的平面截球面所得的圆）面积的4倍.

【课堂检测】

1．直径为 6 的球的表面积和体积分别是（　　）

A．36π，144π　　B．36π，36π

C．144π，36π　　D．144π，144π

解析：选 B．球的半径为 3，表面积 $S=4\pi\cdot 3^2=36\pi$，体积 $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi$.

2．一个正方体的表面积与一个球的表面积相等，那么它们的体积比是（　　）

A.$\frac{\sqrt{6\pi}}{6}$　　B.$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

C.$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　D.$\frac{3\sqrt{\pi}}{2\pi}$

解析：选 A．设正方体棱长为 a，球半径为 R，由 $6a^2=4\pi R^2$ 得$\frac{a}{R}=\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$，

所以$\frac{V_1}{V_2}=\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{4\pi}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\frac{\sqrt{6\pi}}{6}$.

3．若两球的体积之和是 12π，经过两球球心的截面圆周长之和为 6π，则两球的半径之差为（　　）

A．1　　B．2

C．3　　D．4

解析：选 A．设两球的半径分别为 R，r（$R>r$），则由题意得$\begin{cases}\frac{4\pi}{3}R^3+\frac{4\pi}{3}r^3=12\pi,\\ 2\pi R+2\pi r=6\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}R=2,\\ r=1.\end{cases}$故 $R-r=1$.

4．已知棱长为 2 的正方体的体积与球 O 的体积相等，则球 O 的半径为________.

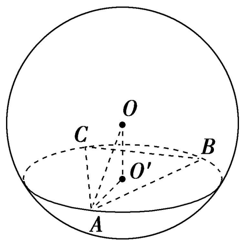
解析：设球 O 的半径为 r，则$\frac{4}{3}\pi r^3=2^3$，

解得 $r=\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

答案：$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$

5．已知过球面上 A，B，C 三点的截面和球心的距离为球半径的一半，且 $AB=BC=CA=2$，求球的表面积.

解：设截面圆心为 O'，球心为 O，连接 $O'A$，OA，OO'，



设球的半径为 R.

因为 $O'A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在 Rt$\triangle O'OA$ 中，$OA^2=O'A^2+O'O^2$，

所以 $R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{1}{4}R^2$，

所以 $R=\frac{4}{3}$，

所以 $S_{球}=4\pi R^2=\frac{64}{9}\pi$.