3.1.1 函数的概念

教材分析

函数在高中数学中占有很重要的比重，因而作为函数的第一节内容，主要从三个实例出发，引出函数的概念.从而就函数概念的分析判断函数，求定义域和函数值，再结合三要素判断函数相等.

教学目标与核心素养

课程目标

1.理解函数的定义、函数的定义域、值域及对应法则。

2.掌握判定函数和函数相等的方法。

3.学会求函数的定义域与函数值。

数学学科素养

1.数学抽象：通过教材中四个实例总结函数定义；

2.逻辑推理：相等函数的判断；

3.数学运算：求函数定义域和求函数值；

4.数据分析：运用分离常数法和换元法求值域；

5.数学建模：通过从实际问题中抽象概括出函数概念的活动，培养学生从“特殊到一般”的分析问题的能力，提高学生的抽象概括能力。

教学重难点

重点：函数的概念，函数的三要素。

难点：函数概念及符号 y=f(x)的理解。

课前准备

教学方法：以学生为主体，采用诱思探究式教学，精讲多练。

教学工具：多媒体。

教学过程

一、 情景导入

初中已经学过：正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等，那么在初中函数是怎样定义的？高中又是怎样定义？

要求：让学生自由发言，教师不做判断。而是引导学生进一步观察.研探.

二、 预习课本，引入新课

阅读课本 60-65 页，思考并完成以下问题

1. 在集合的观点下函数是如何定义？函数有哪三要素？

2. 如何用区间表示数集？3. 相等函数是指什么样的函数？

要求：学生独立完成，以小组为单位，组内可商量，最终选出代表回答问题。

三、新知探究

1．函数的概念

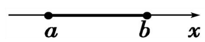
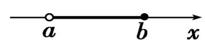
(1)函数的定义：

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任何一个属 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 f(x)和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 y=f(x)x∈A.

(2)函数的定义域与值域：

函数 $y=f(x)$ 中，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的定义域，与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫做函数的值域．显然，值域是集合 B 的子集．

2．区间概念(a，b 为实数，且 a＜b)

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,\ b]$	
$\{x\|a<x<b\}$	开区间	$(a,\ b)$	
$\{x\|a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,\ b)$	
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a,\ b]$	

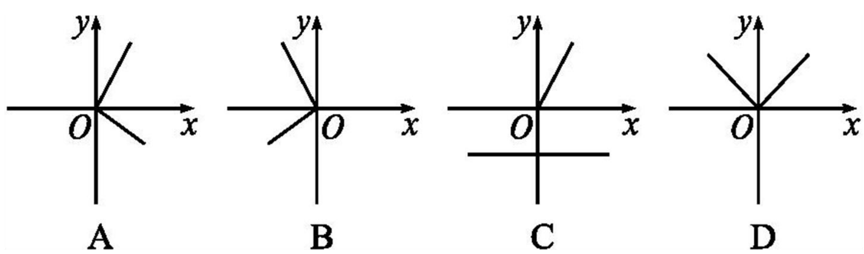
3．其它区间的表示

定义	R	$\{x\|x\geqslant a\}$	$\{x\|x>a\}$	$\{x\|x\leqslant a\}$	$\{x\|x<a\}$
符号	$(-\infty,\ +\infty)$	$[a,\ +\infty)$	$(a,\ +\infty)$	$(-\infty,\ a]$	$(-\infty,\ a)$

四、典例分析、举一反三

题型一　　函数的定义

例 1 下列选项中(横轴表示 x 轴,纵轴表示 y 轴),表示 y 是 x 的函数的是(　　)



【答案】D

解题技巧：（判断是否为函数）

1.(图形判断)y 是 x 的函数,则函数图象与垂直于 x 轴的直线至多有一个交点.若有两个或两个以上的交点,则不符合函数的定义,所对应图象不是函数图象.

2.(对应关系判断)对应关系是“一对一”或“多对一”的是函数关系;“一对多”的不是函数关系.

跟踪训练一

1.集合 A={x|0≤x≤4},B={y|0≤y≤2},下列不表示从 A 到 B 的函数的是(　　)

A.$x\to y=\frac{x}{2}$

B.$x\to y=\frac{x}{3}$

C.$x\to y=\frac{2x}{3}$

D.$x\to y=\sqrt{x}$

【答案】C

题型二　相等函数

例 2　试判断以下各组函数是否表示同一函数:

(1)$f(x)=(\sqrt{x})^2$,$g(x)=\sqrt{x^2}$;　(2)$y=x^0$ 与 $y=1(x\neq0)$;(3)$y=2x+1(x\in Z)$ 与 $y=2x-1(x\in Z)$.

【答案】见解析

【解析】:(1)因为函数 $f(x)=(\sqrt{x})2$ 的定义域为{x|x≥0},而 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域为{x|x∈R},它们的定义域不同,所以它们不表示同一函数.

(2)因为 $y=x^0$ 要求 x≠0,且当 x≠0 时,$y=x^0=1$,故 $y=x^0$ 与 y=1(x≠0)的定义域和对应关系都相同,所以它们表示同一函数.

(3)y=2x+1(x∈Z)与 y=2x-1(x∈Z)两个函数的定义域相同,但对应关系不相同,故它们不表示同一函数.

解题技巧:(判断函数相等的方法)

定义域优先原则

1.先看定义域,若定义域不同,则函数不相等.

2.若定义域相同,则化简函数解析式,看对应关系是否相等.

跟踪训练二

1.试判断以下各组函数是否表示同一函数:①$f(x)=\frac{x^2-x}{x}$,$g(x)=x-1$;

②$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$,$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$;　③$f(x)=\sqrt{(x+3)^2}$,$g(x)=x+3$;　④$f(x)=x+1$,$g(x)=x+x^0$;

⑤汽车匀速运动时,路程与时间的函数关系 f(t)=80t(0≤t≤5)与一次函数 g(x)=80x(0≤x≤5).

其中表示相等函数的是__________(填上所有正确的序号).

【答案】⑤

【解析】①f(x)与 g(x)的定义域不同,不是同一函数;

②f(x)与 g(x)的解析式不同,不是同一函数;

③f(x)=|x+3|,与 g(x)的解析式不同,不是同一函数;

④f(x)与 g(x)的定义域不同,不是同一函数;

⑤f(x)与 g(x)的定义域、值域、对应关系皆相同,是同一函数.

题型三　区间

例 3 已知集合 A={x|5-x≥0},集合 B={x||x|-3≠0},则 A∩B 用区间可表示为__________.

【答案】$(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,5]$

【解析】∵$A=\{x|5-x\geqslant 0\}$，∴$A=\{x|x\leqslant 5\}$. ∵$B=\{x||x|-3\neq 0\}$，∴$B=\{x|x\neq\pm 3\}$.
∴$A\cap B=\{x|x<-3$ 或 $-3<x<3$ 或 $3<x\leqslant 5\}$，即 $A\cap B=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,5]$.

解题技巧：（如何用区间表示集合）

1. 正确利用区间表示集合，要特别注意区间的端点值能否取到，即“小括号”和“中括号”的区别.
2. 用区间表示两集合的交集、并集、补集运算时，应先求出相应集合，再用区间表示.

跟踪训练三

1. 集合$\{x|0<x<1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 11\}$用区间表示为__________.
2. 若集合 $A=[2a-1,a+2]$，则实数 a 的取值范围用区间表示为__________.

【答案】(1) $(0,1)\cup[2,11]$　(2) $(-\infty,3)$

【解析】 (2) 由区间的定义知，区间 (a,b)（或 $[a,b]$）成立的条件是 $a<b$.
∵$A=[2a-1,a+2]$，∴$2a-1<a+2$. ∴$a<3$，∴实数 a 的取值范围是 $(-\infty,3)$.

题型四　求函数的定义域

例 4 求下列函数的定义域：(1) $y=\frac{(x+2)^0}{|x|-x}$；　(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}-\sqrt{4-x}$.

【答案】(1)　$(-\infty,-2)\cup(-2,0)$　(2)　$(-\infty,1)\cup(1,4]$

【解析】(1) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足$\begin{cases}x+2\neq 0,\\|x|-x\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq -2,\\|x|\neq x,\end{cases}$ 解得 $x<0$，且 $x\neq -2$.

故原函数的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$.

(2) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足$\begin{cases}4-x\geq 0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leq 4,\\x\neq 1.\end{cases}$

故原函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,4]$.

解题方法（求函数定义域的注意事项）

(1) 如果函数 $f(x)$ 是整式，那么函数的定义域是实数集 R；
(2) 如果函数 $f(x)$ 是分式，那么函数的定义域是使分母不等于零的实数组成的集合；
(3) 如果函数 $f(x)$ 是二次根式，那么函数的定义域是使根号内的式子大于或等于零的实数组成的集合；
(4) 如果函数 $f(x)$ 是由两个或两个以上代数式的和、差、积、商的形式构成的，那么函数的定义域是使各式子都有意义的自变量的取值集合（即求各式子自变量取值集合的交集）.

跟踪训练四

1. 求函数 $y=\sqrt{2x+3}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{1}{x}$的定义域.
2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$，求函数 $f(2x+1)$ 的定义域.

【答案】(1)　$\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leq x<2,\text{且 }x\neq 0\right\}$　(2)　$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

【解析】(1) 要使函数有意义，需$\begin{cases}2x+3\geq 0,\\2-x>0,\\x\neq 0,\end{cases}$

解得$-\frac{3}{2}\leqslant x<2$，且 $x\neq 0$，所以函数 $y=\sqrt{2x+3}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{1}{x}$的定义域为$\left\{x\middle|-\frac{3}{2}\leq x<2,\text{且 }x\neq 0\right\}$.

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 4$. 故对于 $f(2x+1)$ 应有 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 4$,

∴$-2\leqslant 2x\leqslant 3$，∴$-1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$. ∴函数 $f(2x+1)$ 的定义域是$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$.

题型五　求函数值（域）

例 5 (1)已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}(x\in R$，且 $x\neq-1)$，$g(x)=x^2+2(x\in R)$，则 $f(2)=$________，$f(g(2))=$________.

(2)求下列函数的值域：

①$y=x+1$；　　②$y=x^2-2x+3$，$x\in[0,3)$；③$y=\frac{3x-1}{1+x}$；　　④$y=2x-\sqrt{x-1}$.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$　$\frac{1}{7}$　(2) ① R　② $[2,6)$　③ $\{y|y\in R$ 且 $y\neq3\}$　④ $\left[\frac{15}{8},+\infty\right)$

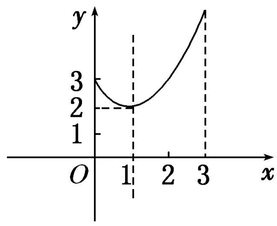
【解析】(1) $\because f(x)=\frac{1}{1+x}$，$\therefore f(2)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

又 $\because g(x)=x^2+2$，$\therefore g(2)=2^2+2=6$，

$\therefore f(g(2))=f(6)=\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.

(2) ①(观察法)因为 $x\in R$，所以 $x+1\in R$，即函数值域是 R.

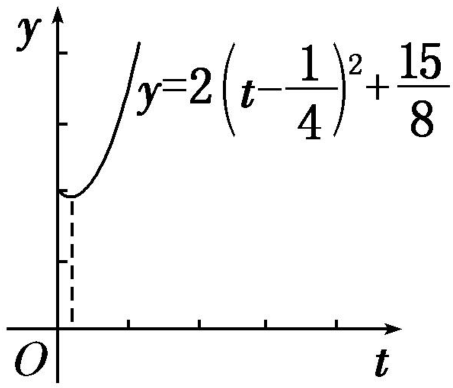
②(配方法)$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，由 $x\in[0,3)$，再结合函数的图象(如图)，可得函数的值域为$[2,6)$.



③(分离常数法)$y=\frac{3x-1}{x+1}=\frac{3x+3-4}{x+1}=3-\frac{4}{x+1}$.

$\because \frac{4}{x+1}\neq0$，$\therefore y\neq3$，$\therefore y=\frac{3x-1}{x+1}$的值域为$\{y|y\in R$ 且 $y\neq3\}$.

④(换元法)设 $t=\sqrt{x-1}$，则 $t\geq0$ 且 $x=t^2+1$，所以 $y=2(t^2+1)-t=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}$，由 $t\geq0$，再结合函数的图象(如图)，可得函数的值域为$\left[\frac{15}{8},+\infty\right)$.



解题方法（求函数值（域)的方法）

1.已知 f(x)的表达式时,只需用数 a 替换表达式中的所有 x 即得 f(a)的值.

2.求 f(g(a))的值应遵循由内到外的原则.

3. 求函数值域常用的 4 种方法

（1）观察法：对于一些比较简单的函数，其值域可通过观察得到；

（2）配方法：当所给函数是二次函数或可化为二次函数处理的函数时，可利用配方法或二次函数图像求其值域；

（3）分离常数法：此方法主要是针对有理分式，即将有理分式转化为“反比例函数类”的形式，便于求值域；

（4）换元法：即运用新元代换，将所给函数化成值域易确定的函数，从而求得原函数的值域.对于 $f(x)=ax+b+\sqrt{cx+d}$（其中 a，b，c，d 为常数，且 $a\neq0$）型的函数常用换元法.

跟踪训练五

1.求下列函数的值域：(1)$y=\sqrt{2x+1}+1$；(2)$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

【答案】(1) $[1,+\infty)$　(2) $(-1,1]$

【解析】(1)因为$\sqrt{2x+1}\geq0$，所以$\sqrt{2x+1}+1\geq1$，即所求函数的值域为$[1,+\infty)$.

(2)因为 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1+\frac{2}{1+x^2}$，又函数的定义域为 R，所以 $x^2+1\geqslant 1$，所以 $0<\frac{2}{1+x^2}\leqslant 2$，则 $y\in(-1,1]$．所以所求函数的值域为 $(-1,1]$．

五、课堂小结

让学生总结本节课所学主要知识及解题技巧

六、板书设计

3.1.1 函数的概念					
1.定义	例 1	例 2	例 3	例 4	例 5
2.区间					

七、作业

课本 67 页练习、72 页 1-5

教学反思

本节课主要通过从实际问题中抽象概括出函数概念的活动，培养学生从“特殊到一般”的分析问题的能力，尤其在求抽象函数定义域时，先根据特殊函数的规律总结一般规律.