2.3.3 点到直线的距离公式
2.3.4 两条平行线间距离

【学习目标】

课程标准	学科素养
1. 了解点到直线距离公式的推导方法．（重点）	1、直观想象
2. 掌握点到直线距离公式，并能灵活应用于求平行线间的距离等问题．（难点）	2、数学运算
3. 初步掌握用解析法研究几何问题．（重点、难点）	3、数形结合

【自主学习】

1.点到直线的距离

(1)概念：过一点向直线作垂线，则该点与_____之间的距离，就是该点到直线的距离．

(2)公式：点 $P(x_0，y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 $d=$_________．

2.两平行直线间的距离

(1)概念：夹在两条平行直线间的<u>公垂线段</u>的长度就是两条平行直线间的距离．

(2)公式：两条平行直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$ 与 l_2：$Ax+By+C_2=0$ 之间的距离 $d=$______．

思考 1：在使用点到直线距离公式时对直线方程有什么要求？

思考 2：在应用两条平行线间的距离公式时对直线方程有什么要求？

【小试牛刀】

1．判断下列命题是否正确．(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)点 $P(x_0，y_0)$到与 x 轴平行的直线 $y=b(b\neq0)$的距离 $d=y_0-b$.(　　)

(2)点 $P(x_0，y_0)$到与 y 轴平行的直线 $x=a(a\neq0)$的距离 $d=|x_0-a|$.(　　)

(3)两直线 $x+y=m$ 与 $x+y=2n$ 的距离为$\frac{|m-2n|}{\sqrt{2}}$.(　　)

2．原点到直线 $x+2y-5=0$ 的距离为(　　)

A．1　　B.$\sqrt{3}$　　C．2　　D.$\sqrt{5}$

3.两条平行线 l_1：$3x+4y-7=0$ 和 l_2：$3x+4y-12=0$ 的距离为(　　)

A．3　　B．2　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

【经典例题】

题型一　点到直线的距离

注意：应用点到直线的距离公式应注意的三个问题

(1)直线方程应为一般式，若给出其他形式应化为一般式.

(2)点 P 在直线 l 上时，点到直线的距离为 0，公式仍然适用.

(3)直线方程 $Ax+By+C=0$ 中，$A=0$ 或 $B=0$ 公式也成立，但由于直线是特殊直线(与坐标轴垂直)，故也可用数形结合求解.

例 1　求点 $P(3，-2)$到下列直线的距离：

(1)$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$；　(2)$y=6$；　(3)$x=4$.

[跟踪训练]1　已知点$(a，2)(a>0)$到直线 l：$x-y+3=0$ 的距离为 1，则 $a=$(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B．$2-\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{2}-1$　　D.$\sqrt{2}+1$

题型二　两平行线间的距离

注意：求两平行线间的距离，一般是直接利用两平行线间的距离公式，当直线 l_1：$y=kx+b_1$，l_2：$y=kx+b_2$，且 $b_1\neq b_2$ 时，$d=\frac{|b_1-b_2|}{\sqrt{k^2+1}}$；当直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$ 且 $C_1\neq C_2$ 时，$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 但必须注意两直线方程中 x，y 的系数对应相等.

例 2　两直线 $3x+y-3=0$ 和 $6x+my-1=0$ 平行，则它们之间的距离为________.

例 3　直线 l_1 过点 $A(0，1)$，l_2 过点 $B(5，0)$，如果 $l_1\parallel l_2$，且 l_1 到 l_2 的距离为 5，求 l_1，l_2 的方程.

[跟踪训练]2 求与直线 l：$5x-12y+6=0$ 平行且与直线 l 距离为 3 的直线方程.

题型三　距离公式的综合应用

例 4 已知正方形的中心为直线 $2x-y+2=0$，$x+y+1=0$ 的交点，正方形一边所在的直线 l 的方程为 $x+3y-5=0$，求正方形其他三边所在直线的方程.

[跟踪训练] 3 求过点(3，5)的所有直线中，距原点最远的直线方程.

【当堂达标】

1．点(5，－3)到直线 $x+2=0$ 的距离等于(　　)

A．7　　B．5　　C．3　　D．2

2．两条平行线 l_1：$3x+4y-2=0$，l_2：$9x+12y-10=0$ 间的距离等于(　　)

A.$\frac{7}{5}$　　B.$\frac{7}{15}$　　C.$\frac{4}{15}$　　D.$\frac{2}{3}$

3．光线从点 $A(-3，5)$射到 x 轴上，经反射以后经过点 $B(2，10)$，则光线从 A 到 B 的距离为(　　)

A．$5\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$5\sqrt{10}$　　D．$10\sqrt{5}$

4．已知两点 $A(-3，-2)$和 $B(-1，4)$到直线 $x+ay+1=0$ 的距离相等，则实数 a 为________.

5．已知直线 l 经过点(－2，3)，且原点到直线 l 的距离等于 2，求直线 l 的方程.

【参考答案】

【自主学习】

垂足　$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　$\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

要求直线的方程应化为一般式.

两条平行直线的方程都是一般式，且 x, y 对应的系数应分别相等.

【小试牛刀】

1.(1)×　(2)√　(3)√

2. D　解析：利用点到直线的距离公式可得：原点到直线 $x+2y-5=0$ 的距离 $d=\frac{|0+0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$.

3. C　$[d=\frac{|-7-(-12)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1.]$

【经典例题】

例 1　解　(1)把方程 $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ 写成 $3x-4y+1=0$，由点到直线的距离公式得 $d=\frac{|3\times3-4\times(-2)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{18}{5}$.

(2)法一：把方程 $y=6$ 写成 $0\cdot x+y-6=0$,由点到直线的距离公式得 $d=\frac{|0\times3+(-2)-6|}{\sqrt{0^2+1^2}}=8$.

法二：因为直线 $y=6$ 平行于 x 轴，所以 $d=|6-(-2)|=8$.

(3)因为直线 $x=4$ 平行于 y 轴，所以 $d=|4-3|=1$.

[跟踪训练]1　C　解析　由点到直线的距离公式得：$\frac{|a-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}=1$，$\therefore |a+1|=\sqrt{2}$.

$\because a>0$，　$\therefore a=\sqrt{2}-1$.故选 C.

例 2　由题意，得 $\frac{6}{3}=\frac{m}{1}$，$\therefore m=2$，将直线 $3x+y-3=0$ 化为 $6x+2y-6=0$，

由两平行线间距离公式，得 $\frac{|-1+6|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

[跟踪训练]2　[解]　$\because$ 与 l 平行的直线方程为 $5x-12y+b=0$，

根据两平行直线间的距离公式得 $\frac{|b-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=3$，解得 $b=45$ 或 $b=-33$.

所以所求直线方程为：$5x-12y+45=0$，或 $5x-12y-33=0$.

例 3　解　(1)若 l_1，l_2 的斜率存在，设斜率为 k，

由斜截式得 l_1 的方程为 $y=kx+1$，即 $kx-y+1=0$，

由点斜式可得 l_2 的方程为 $y=k(x-5)$，即 $kx-y-5k=0$，

则点 A 到直线 l_2 的距离 $d=\frac{|1+5k|}{\sqrt{1+k^2}}=5$，∴$25k^2+10k+1=25k^2+25$，∴$k=\frac{12}{5}$.

∴l_1 的方程为 $12x-5y+5=0$，l_2 的方程为 $12x-5y-60=0$.

(2)若 l_1，l_2 的斜率不存在，则 l_1 的方程为 $x=0$，l_2 的方程为 $x=5$，它们之间的距离为 5，同样满足条件.

综上，满足条件的直线方程有两组：

l_1：$12x-5y+5=0$，l_2：$12x-5y-60=0$ 或 l_1：$x=0$，l_2：$x=5$.

例 4　解　设与直线 l：$x+3y-5=0$ 平行的边所在的直线方程为 l_1：$x+3y+c=0(c\neq-5)$.

由 $\begin{cases}2x-y+2=0,\\x+y+1=0,\end{cases}$ 得正方形的中心坐标为 $P(-1，0)$，

由点 P 到两直线 l，l_1 的距离相等，得 $\frac{|-1-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-1+c|}{\sqrt{1^2+3^2}}$，得 $c=7$ 或 $c=-5$(舍去).∴l_1：$x+3y+7=0$.

又正方形另两边所在直线与 l 垂直，

∴设另两边所在直线的方程分别为 $3x-y+a=0$，$3x-y+b=0$.

∵正方形中心到四条边的距离相等，

∴$\frac{|-3+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-1-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}$，得 $a=9$ 或 $a=-3$，

∴另两条边所在的直线方程分别为 $3x-y+9=0$，$3x-y-3=0$.

∴另三边所在的直线方程分别为 $3x-y+9=0$，$x+3y+7=0$，$3x-y-3=0$.

[跟踪训练] 3　解　设过点(3，5)的直线方程为 $y-5=k(x-3)$或 $x=3$.对于 $y-5=k(x-3)$，

原点(0，0)到它的距离 $d=\frac{|3k-5|}{\sqrt{k^2+1}}$，化简整理得$(9-d^2)k^2-30k+25-d^2=0$.

当 $9-d^2\neq0$ 时，因 $k\in\mathbf{R}$，∴$\Delta=(-30)^2-4(9-d^2)(25-d^2)\geq0$.解得 $0\leq d\leq\sqrt{34}$(且 $d\neq3$).

对于 $x=3$，原点到它的距离 $d=3$.

因此，过点(3，5)的所有直线与原点的距离 $d\in[0，\sqrt{34}]$.

故 $d_{max}=\sqrt{34}$，当 $d=\sqrt{34}$时，$\frac{|3k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{34}$,解得 $k=-\frac{3}{5}$.故所求直线方程为：$y-5=-\frac{3}{5}(x-3)$，

即 $3x+5y-34=0$.

【当堂达标】

1. A [直线 $x+2=0$，即 $x=-2$ 为平行于 y 轴的直线，所以点(5，−3)到 $x=-2$ 的距离 $d=|5-(-2)|=7$.]

2. C 解析 l_1 的方程可化为 $9x+12y-6=0$，由平行线间的距离公式得 $d=\frac{|-6+10|}{\sqrt{9^2+12^2}}=\frac{4}{15}$.

3.C 解析 ∵点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(-3，-5)$，

∴$|A'B|=\sqrt{(-3-2)^2+(-5-10)^2}=5\sqrt{10}$，由光的反射理论可知，

此即为光线从 A 到 B 的距离.

4. 1 或$-\frac{1}{3}$解析 ∵两点 $A(-3，-2)$，$B(-1，4)$到直线 l：$x+ay+1=0$ 的距离相等，

∴$\frac{|-3-2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|-1+4a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$，化为$|2a+2|=|4a|$.∴$2a+2=\pm4a$，解得 $a=1$ 或$-\frac{1}{3}$.

5. 解 当直线 l 的斜率不存在时，直线的方程为 $x=-2$，符合原点到直线 l 的距离等于 2.

当直线 l 的斜率存在时，

设所求直线 l 的方程为 $y-3=k(x+2)$，即 $kx-y+2k+3=0$，由 $d=\frac{|0-0+2k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，

得 $k=-\frac{5}{12}$，即直线 l 的方程为 $5x+12y-26=0$.

反盗版维权声明

北京凤凰学易科技有限公司（学科网：www. zxxk. com）郑重发表如下声明：

一、本网站原创内容，由本网站依照运营规划，安排专项经费，组织名校名师创作完成，本公司拥有著作权。

二、本网站刊登的试卷、教案、课件、学案等内容，经著作权人授权，本公司享有独家信息网络传播权。

三、任何个人、企事业单位（含教育网站）或者其他组织，未经本公司许可，不得以复制、发行、表演、广播、信息网络传播、改编、汇编、翻译等任何方式使用本网站任何作品及作品的组成部分。

四、一旦发现侵犯本网站作品著作权的行为，欢迎予以举报。

举报电话：010-58425260。

举报内容对查实侵权行为确有帮助的，一经确认，将给予所获得奖励。

五、我们将联合全国各地文化执法机关和相关司法机构，并结合广大用户和网友的举报，严肃清理侵权盗版行为，依法追究侵权者的民事、行政和刑事责任！

特此声明！

北京凤凰学易科技有限公司