# 复数的三角表示

| 【教学重难点】 | 【教学目标】 | 【核心素养】 |
|---|---|---|
| 复数的三角形式 | 了解复数的三角形式，了解复数的代数表示与三角表示之间的关系 | 数学抽象 |
| 复数三角形式乘、除运算的三角表示及其几何意义 | 了解复数乘、除运算的三角表示及其几何意义 | 数学抽象、数学运算 |

## 【教学过程】

一、问题导入

预习教材内容，思考以下问题：

1．复数 $z=a+bi$ 的三角形式是什么？

2．复数的辐角、辐角的主值是什么？

3．复数三角形式的乘、除运算公式是什么？

4．复数三角形式乘、除运算的几何意义是什么？

二、基础知识

1．复数的三角表示式及复数的辐角和辐角的主值

一般地，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，其中，$r$ 是复数 $z$ 的模；$\theta$是以 $x$ 轴的非负半轴为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在射线(射线$\overrightarrow{OZ}$)为终边的角，叫做复数 $z=a+bi$ 的辐角，我们规定在 $0\leq\theta<2\pi$ 范围内的辐角$\theta$的值为辐角的主值，通常记作 $\arg z$.$r(\cos\theta+i\sin\theta)$叫做复数 $z=a+bi$ 的三角表示式，简称三角形式．$a+bi$ 叫做复数的代数表示式，简称代数形式．

■名师点拨

（1）任何一个不为零的复数的辐角有无限多个值，且这些值相差 $2\pi$ 的整数倍．

（2）复数 0 的辐角是任意的．

（3）在 $0\leq\theta<2\pi$ 范围内的辐角$\theta$的值为辐角的主值，通常记作 $\arg z$，且 $0\leq\arg z<2\pi$．

（4）两个非零复数相等当且仅当它们的模与辐角的主值分别相等．

2．复数三角形式的乘、除运算

若复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，且 $z_1\neq z_2$，则

（1）$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=\underline{r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]}$.

（2）$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}$

$=\underline{\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]}$.

即：两个复数相乘，积的模等于<u>各复数的模的积</u>，积的辐角等于各复数的辐角的<u>和</u>.

两个复数相除，商的模等于<u>被除数</u>的模除以<u>除数</u>的模所得的商，商的辐角等于<u>被除数</u>的辐角减去<u>除数</u>的辐角所得的差.

三、合作探究

1．复数的代数形式与三角形式的互化

角度一　代数形式化为三角形式

**例1** 把下列复数的代数形式化成三角形式：

（1）$\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

（2）$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

【解】（1）$r=\sqrt{3+1}=2$，因为$\sqrt{3}+\mathrm{i}$对应的点在第一象限，

所以$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（2）$r=\sqrt{2+2}=2$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$对应的点位于第四象限，

所以$\theta=\dfrac{7\pi}{4}$.

所以$\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

**规律方法**

复数的代数形式化三角形式的步骤

（1）先求复数的模.

（2）决定辐角所在的象限.

（3）根据象限求出辐角.

（4）求出复数的三角形式.

[提醒]一般在复数三角形式中的辐角，常取它的主值这既使表达式简便，又便于运算，但

三角形式辐角不一定取主值．

角度二　三角形式化为代数形式

**例 2** 分别指出下列复数的模和辐角的主值，并把这些复数表示成代数形式．

（1）$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$；

（3）$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$．

【解】（1）复数 $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$的模 $r=4$，辐角的主值为$\theta=\frac{\pi}{6}$．

$4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}+4i\sin\frac{\pi}{6}$

$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}i$

$=2\sqrt{3}+2i$.

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$的模 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，辐角的主值为$\theta=60°$．

$\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$.

（3）$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$.

所以复数的模 $r=2$，辐角的主值为$\frac{5}{3}\pi$．

$2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=2\cos\frac{5}{3}\pi+2i\sin\frac{5}{3}\pi$

$=2\times\frac{1}{2}+2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

$=1-\sqrt{3}i$.

规律方法

复数的三角形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 必须满足“模非负、余正弦、＋相连、角统一、i 跟 sin”，否则就不是三角形式，只有化为三角形式才能确定其模和辐角，如本例（3）.

2．复数三角形式的乘、除运算

例 3 计算：

（1）$8\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\times4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$;

（2）$\sqrt{3}(\cos225°+i\sin225°)\div[\sqrt{2}(\cos150°+i\sin150°)]$；

（3）$4\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

【解】（1）$8\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\times4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$=32\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

$=32\left(\cos\frac{13}{6}\pi+i\sin\frac{13}{6}\pi\right)$

$=32\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=32\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=16\sqrt{3}+16i$.

（2）$\sqrt{3}(\cos225°+i\sin225°)\div[\sqrt{2}(\cos150°+i\sin150°)]$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}[\cos(225°-150°)+i\sin(225°-150°)]$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos75°+i\sin75°)$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)$

$=\frac{6-2\sqrt{3}}{8}+\frac{6+2\sqrt{3}}{8}i$

$=\frac{3-\sqrt{3}}{4}+\frac{3+\sqrt{3}}{4}i$.

（3）$4\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=4(\cos0+i\sin0)\div\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

规律方法

（1）乘法法则：模相乘，辐角相加．

（2）除法法则：模相除，辐角相减．

（3）复数的 $n$ 次幂，等于模的 $n$ 次幂，辐角的 $n$ 倍．

3．复数三角形式乘、除运算的几何意义

例 4 在复平面内，把复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量分别按逆时针和顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$，求所得向量对应的复数．

【解】因为 $3-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

所以 $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{13}{6}\pi+i\sin\frac{13}{6}\pi\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=3+\sqrt{3}i$，

$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

$=-2\sqrt{3}i$.

故把复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量按逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到的复数为 $3+\sqrt{3}i$，按顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到的复数为 $-2\sqrt{3}i$.

规律方法

两个复数 $z_1$，$z_2$ 相乘时，先分别画出与 $z_1$，$z_2$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，然后把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 $O$ 按逆时针方向旋转角 $\theta_2$(如果 $\theta_2<0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 $O$ 按顺时针方向旋转角 $|\theta_2|$)，再把它的模变为原来的 $r_2$ 倍，得到向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OZ}$ 表示的复数就是积 $z_1z_2$.

四、课堂检测

1．复数 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的辐角的主值是(　　)

A．$\frac{5}{3}\pi$　　　　B．$\frac{2}{3}\pi$

C．$\frac{5}{6}\pi$　　　　D．$\frac{\pi}{3}$

解析：选 A．因为 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)$，所以 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 辐角的主值为 $\frac{5}{3}\pi$.

2．复数 $9(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)$ 的模是________.

答案：9

3．$\arg(-2\mathrm{i})=$________.

答案：$\frac{3}{2}\pi$

4．计算：

（1）$(\cos 75°+\mathrm{i}\sin 75°)(\cos 15°+\mathrm{i}\sin 15°)$；

（2）$2(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right]$.

解：（1）$(\cos 75°+\mathrm{i}\sin 75°)(\cos 15°+\mathrm{i}\sin 15°)$

$=\cos(75°+15°)+\mathrm{i}\sin(75°+15°)$

$=\cos 90°+\mathrm{i}\sin 90°$

$=\mathrm{i}$.

（2）$2(\cos 300°+\mathrm{i}\sin 300°)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)\div\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{11}{12}\pi\right)$

$=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$