

5.2.1 三角函数的概念

教材分析

本节课选自《普通高中课程标准数学教科书-必修第一册》（人教A版）第五章《三角函数》，本节课是第3课时，这是节关于任意角的三角函数的概念课。

三角函数是高中范围内继指数函数、对数函数和幂函数之后学习的函数，是函数的一个下位概念，与指数函数、幂函数属于同一抽象(概括)层次。它是一种重要的基本初等函数，是解决实际问题的工具，也是学习数学中其他知识内容的基础。

在初中，学生已学过锐角三角函数，知道直角三角形中锐角三角函数等于相应边长的比值。在此基础上，随着角的概念的推广，引入弧度制，相应地将锐角三角函数推广为任意角的三角函数，此时它与三角形已经没有什么关系了。任意角的三角函数是研究一个实数集(角的弧度数构成的集合)到另一个实数集(角的终边与单位圆交点的坐标或其比值构成的集合)的对应关系。认识它需要借助单位圆、角的终边以及两者的交点这些几何图形的直观帮助，这里体现了数形结合的思想，由锐角三角函数到坐标表示的锐角三角函数，再到单位圆上的点的坐标表示的锐角三角函数，直至得到任意角的三角函数的定义，体现了合情推理的思想方法。本节课将围绕任意角三角函数的概念展开，任意角三角函数的概念是本节课的重点，能够利用单位圆认识这个概念是解决教学重点的关键。

教学目标与核心素养

课程目标	学科素养
A.借助单位圆理解任意角三角函数的定义； B. 根据定义认识函数值的符号，理解诱导公式一； C. 能初步运用定义分析和解决与三角函数值有关的一些简单问题； D. 体验三角函数概念的产生、发展过程，领悟直角坐标系的工具功能，丰富数形结合的经验。	1.数学抽象：三角函数的定义； 2.逻辑推理：三角函数概念的推导过程； 3.数学运算：根据定义求三角函数值； 4.直观想象：三角函数定义的推导。

教学重难点

- 1.教学重点：任意角的三角函数（正弦函数、余弦函数、正切函数）的定义；
- 2.教学难点：任意角的三角函数概念的建构过程。

课前准备

多媒体

教学过程

教学过程	教学设计意图 核心素养目标
一、复习回顾，温故知新 1. 1 弧度角的定义 【答案】等于半径长的圆弧所对的圆心角 2. 角度制与弧度制的换算： 【答案】$180^\circ = \pi$, $1\text{弧度} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ$ 3. 关于扇形的公式 【答案】(1) $l = \alpha R$; (2) $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$; (3) $S = \frac{1}{2} l R$. 4. 在初中我们是如何定义锐角三角函数的？ 【答案】 $\sin \alpha = \frac{b}{c}, \cos \alpha = \frac{a}{c}, \tan \alpha = \frac{b}{a}$. 二、探索新知 探究一. 角 α 的始边在 x 轴非负半轴，终边与单位圆交于点 P。当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，点 P 的坐标是什么？当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时，点 P 的坐标又是什么？它们唯一确定吗？ 【答案】当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$。 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，点 P 的坐标为 (0,1)。 当 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 时，点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$。 探究二：一般地，任意给定一个角 α，它的终边 OP 与单位圆交点 P 的坐标能唯一确定吗？ 【答案】点 P 的横、纵坐标都能唯一确定。	通过复习上节知识和初中所学锐角三角函数，引入本节新课。建立知识间的联系，提高学生概括、类比推理的能力。 通过探究，让学生能求角的终边与单位圆的交点坐标，进而明白其确定性，提高学生的解决问题、分析问题的能力。

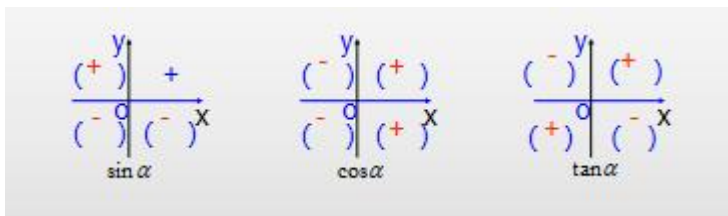
1. 任意角的三角函数定义 设角 α 是一个任意角, $\alpha \in \mathbf{R}$, 它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$。 那么 (1) y 叫做 α 的正弦函数。记作 $\sin \alpha$, 即 $y = \sin \alpha$; (2) x 叫做 α 的余弦函数。记作 $\cos \alpha$, 即 $x = \cos \alpha$; (3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切。记作 $\tan \alpha$, 即 $\frac{y}{x} = \tan \alpha$; $\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0)$ 是以角为自变量, 以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数, 称为正切函数 (tangent function) 正弦函数, 余弦函数, 正切函数都是以角为自变量, 以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数, 我们将他们称为三角函数。 通常将它们记为: 正弦函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 余弦函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$ 正切函数 $y = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 探究三: 在初中我们学了锐角三角函数, 知道它们都是以锐角为自变量。以比值为函数值的函数, 设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 把按锐角三角函数定义求得的锐角 x 的正弦记为 z_1, 并把按本节三角函数定义求得的 x 的正弦记为 y_1。z_1 与 y_1 相等吗? 对于余弦、正切也有相同的结论吗? 【答案】都相等 例 1. 求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值。 变式: 把角 $\frac{5\pi}{3}$ 改为 $\frac{7\pi}{6}$ 呢? 【答案】$\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 例 2. 如图, 设 α 是一个任意角, 它的终边上任意一点 P (不与原点 O 重合) 的坐标为 (x, y), 点 P 与原点的距离为 r。求证:	让学生了解三角函数的定义, 提高学生分析问题、概括能力。 通过探究让学生理解锐角的三角函数与任意角的三角函数的关系。提高学生分析问题的能力。 通过例题让学生学会根据三角函数的定义求角的三角函数值, 提高学生解决问题的能力。
---	--

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

探究四. 1. 根据三角函数的定义, 确定三角函数的定义域。

三角函数	定义域
$y = \sin \alpha$	$\mathbb{R}$
$y = \cos \alpha$	$\mathbb{R}$
$y = \tan \alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

2. 确定三角函数值在各象限的符号。



口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦。

例 3. 求证：角 θ 为第三象限角的充要条件是 $\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \tan \theta > 0 \end{cases}$ 。

【答案】见教材

思考：如果两个角的终边相同，那么这两个角的同一三角函数值有何关系？

终边相同的角的同一三角函数值相等（公式一）

$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha, \text{ 其中, } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha$$

作用：利用公式一，可以把求任意角的三角函数值，转化为求 $0 \sim 2\pi$ (或 $0^\circ \sim 360^\circ$) 角的三角函数值。

例 4 确定下列三角函数值的符号：

$$(1) \cos 250^\circ; (2) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right); (3) \tan(-672^\circ); (4) \tan 3\pi.$$

例 5 求下列三角函数值：

$$(1) \sin 1480^\circ 10' (\text{精确到 } 0.001); (2) \cos \frac{9\pi}{4}; (3) \tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right).$$

通过探究让学生明白三角函数的定义域及在各象限的符号，提高学生分析问题、概括问题的能力。

通过例题巩固三角函数的正负，提高学生解决问题的能力。

通过例题让学生理解判断任意角的三角函数值的正负及求值，提高学生解决问题的能力。

三、达标检测 1. $\sin(-315^\circ)$ 的值是() A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ 【答案】C 【解析】 $\sin(-315^\circ) = \sin(-360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. 已知角 α 终边过点 $P(1, -1)$, 则 $\tan \alpha$ 的值为() A. 1 B. -1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【答案】B 【解析】 由三角函数定义知 $\tan \alpha = \frac{-1}{1} = -1$. 3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 x 轴对称, 若 $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin \beta =$ _____. 【答案】$-\frac{1}{5}$ 【解析】 设角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x, y)$, 则角 β 的终边与单位圆相交于点 $Q(x, -y)$, 由题意知 $y = \sin \alpha = \frac{1}{5}$, 所以 $\sin \beta = -y = -\frac{1}{5}$. 4. 求值: (1) $\sin 180^\circ + \cos 90^\circ + \tan 0^\circ$. (2) $\cos \frac{25\pi}{3} + \tan \left[-\frac{15\pi}{4} \right]$. 【解析】 (1) $\sin 180^\circ + \cos 90^\circ + \tan 0^\circ = 0 + 0 + 0 = 0$. (2) $\cos \frac{25\pi}{3} + \tan \left[-\frac{15\pi}{4} \right]$ $= \cos \left[8\pi + \frac{\pi}{3} \right] + \tan \left[-4\pi + \frac{\pi}{4} \right] = \cos \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.	通过练习巩固本节所学知识, 通过学生解决问题的能力, 感悟其中蕴含的数学思想, 增强学生的应用意识。
四、小结 1. 内容总结 ①三角函数的概念. ②三角函数的定义域及三角函数值在各象限的符号. ③诱导公式一. 2. 方法总结 运用了定义法、公式法、数形结合法解题. 3. 体现的数学思想	通过总结, 让学生进一步巩固本节所学内容, 提高概括能力, 提高学生的数学运算能力和逻辑推理能力。

化归的思想，数形结合的思想.	
五、作业	
习题 5.2 1. (1)、(2) 2 题	

教学反思

任意角三角函数的第一节课，其中心任务应该是让学生建立起计算一个任意角的三角函数与其边上点的坐标之间的关系，并在此基础上初步建立任意角三角函数概念的意义。如，计算方法、定义域、值域、符号表示、有关结论(与点的位置的选取无关)后，首先提供“坐标系”作为脚手架，引发学生的认知冲突——“在坐标系下，如何研究一个任意角的三角函数?”并以坐标系为平台，有层次的研究随角的变化，即第一象限下的锐角(认识研究方法的变化，以及符号表示的变化 $0-2\pi$ 范围内的角(认识该范围内角的三角函数的表示方法，特别是值域的变化)不同象限下终边相同的角(逐渐形成计算一个任意角的三角函数的操作过程)。

锐角三角函数概念教学时如果是先给一个锐角，再构造三角形，而不是家当前大多数教材中采用的直接放在一个直角三角形下，对学生概念的迁移会更有帮助。