27.2.2 相似三角形的性质

一、 教学目标

（一） 知识与技能

1. 掌握相似三角形的性质,了解相似三角形性质的证明.

2. 能应用相似三角形的性质进行有关角、线段、周长、面积等有关计算.

（二） 过程与方法

1. 通过探究、讨论、猜想、证明,学生经历探索相似三角形性质的过程,体会如何探索研究问题.

2. 利用相似三角形的性质解决问题,学生的创新意识进一步提升.

（三） 情感态度与价值观

1. 在探索相似三角形性质的过程中,学生合作交流能力进一步提高.

2. 经历观察、引导、实践、猜想、证明等数学活动过程,发展合情推理能力和初步演绎推理能力.

二、 教学重难点

（一） 教学重点

相似三角形的各条性质定理的探索及应用.

（二） 教学难点

相似三角形性质的归纳推理.

三、 教学准备

（一） 教师准备

多媒体课件.

（二） 学生准备

预习教材 P37~38.

四、 教学过程

（一） 新课导入

导入一:

【复习提问】

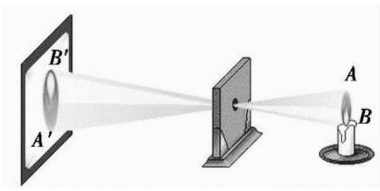
(1)什么叫相似三角形?判定方法有哪些?

(2)相似三角形有哪些基本特征?

(3)除了这些基本特征外,还有什么性质呢?

导入二:

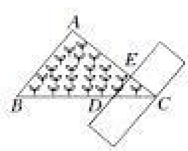
小华做小孔成像实验,如图所示,已知蜡烛与成像面间的距离为1,蜡烛与成像面间的小孔纸板放在何处时,蜡烛火焰AB是像A'B'的一半长?



成像面　　　小孔成像

导入三:

某施工队在道路拓宽施工时遇到这样一个问题,马路旁原有一个面积为 100 平方米、周长为 80 米的三角形绿化地.由于马路的拓宽,绿地被削去一个角,变成了一个梯形,原绿化地一边BC的长由原来的 30 米变为 18 米.那么被削去的部分面积有多少?你能解决这个问题吗?



[设计意图] 通过知识的复习和问题情景的思考,帮助学生认识相似形的性质是对相似形内容学习的深化.

(二) 新知构建

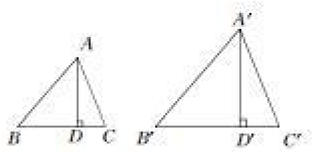
[过渡语] 三角形中有各种各样的几何量,例如三条边的长度,三个内角的度数,高、中线、角平分线的长度,以及周长、面积等,如果两个三角形相似,那么它们的这些量之间有什么关系呢?通过今天的学习,我们将得到结论.

1. 相似三角形的对应线段的比与相似比之间的关系

思路一

如图所示,△ABC和△A'B'C'是两个相似三角形,其相似比为$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$=k,

其中AD,A'D'分别是边BC和B'C'上的高,那么AD,A'D'之间有什么关系呢?



(1) 图中的△ABD和△A'B'D'相似吗?如何证明?

(2) 由相似三角形的对应边成比例,你能得到$\frac{AD}{A'D'}$的值吗?

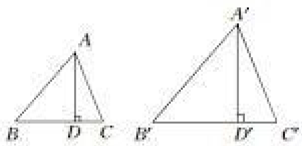
(3) 写出你的解答过程.

(4) 你能叙述你得到的结论吗?

【师生活动】 学生独立思考后,完成书写过程,小组合作交流解答过程及结论,小组代表板书,教师及时帮助有困难的学生,并补充完成证明过程.

【课件展示】 相似三角形对应高的比等于相似比.

如图所示,△ABC∽△A'B'C',相似比为k,其中AD,A'D'分别是BC和B'C'上的高.求证$\frac{AD}{A'D'}$=k.



证明:∵△ABC∽△A'B'C',

∴∠B=∠B',

又△ABD和△A'B'D'都是直角三角形,

∴△ABD∽△A'B'D',

∴$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.

【追加提问】

(1)能去掉性质中的对应两个字吗?

(2)你能用同样的方法证明相似三角形的对应中线、对应角平分线的性质吗?

【师生活动】 学生思考后小组合作交流,然后小组代表口述证明过程,师生共同补充完整,然后共同归纳相似三角形的性质.

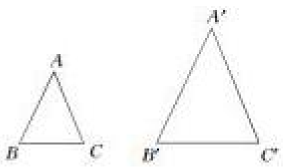
【课件展示】 相似三角形对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

即相似三角形对应线段的比等于相似比.

思路二

【动手操作】

(1)测量如图所示的相似三角形,并得出△ABC与△A'B'C'的相似比.



(2)分别过点A作AD⊥BC,A'D'⊥B'C',垂足为D,D'.

(3)测量两个三角形的高AD与A'D',求出$\frac{AD}{A'D'}$的值.

(4)猜想:相似三角形对应高的比与相似比之间的关系.

(5)证明你的猜想.

【师生活动】 学生测量比较后,小组合作交流结果、猜想及证明,小组代表板书过程,教师巡视过程中帮助有困难的学生,并及时发现问题,在点评时强调易错点.

【课件展示】 相似三角形对应高的比等于相似比.(证明过程同思路一)

【追加提问】 你能用同样的方法证明相似三角形的对应中线、对应角平分线的性质吗?

【师生活动】 学生思考后小组合作交流,然后小组代表口述证明过程,师生共同补充完整,然后共同归纳相似三角形的性质.

【课件展示】 相似三角形对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

即相似三角形对应线段的比等于相似比.

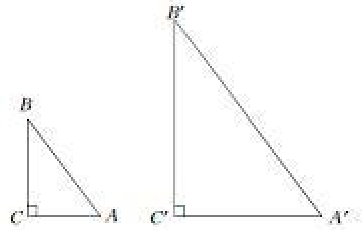
[设计意图] 思路一:在教师的引导下,由相似三角形的性质得对应角相等,然后利用三角形相似的判定定理证出三角形相似,从而得到对应高的比等于相似比;思路二:通过测量,作出猜想,然后小组交流,完成猜想的证明.通过学生的自主探究,完成知识的形成过程,提高学生的数学思维和解决问题的能力.

2. 相似三角形的周长比、面积比与相似比的关系

[过渡语] 全等三角形的周长相等,面积也相等,那么相似三角形的周长和面积有什么关系呢?我们一起去探究!

活动一

如图所示,Rt△ABC和 Rt△A'B'C'中,AC=3,BC=4,AB=5,A'C'=6,B'C'=8,A'B'=10.



【思考】

(1)两个直角三角形相似吗?

(2)计算这两个三角形的周长,它们的周长比与相似比有什么关系?

(3)再计算两个三角形的面积,它们的面积比与相似比有什么关系?

【师生活动】　学生独立完成后回答教师提出的问题.

活动二

(1)任意相似三角形的周长比与相似比有什么关系?(2)

证明你的结论.

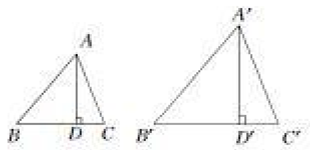
(3)任意相似三角形的面积比与相似比有什么关系?(4)

证明你的结论.

【师生活动】　学生思考后,小组合作交流,共同探究证明方法,板书证明过程,教师及时帮助有困难的学生,并点评学生的解答.

【课件展示】　相似三角形的周长比等于相似比.相似三角形的面积比等于相似比的平方.

如图所示,△ABC∽△A′B′C′,相似比为k,其中AD,A′D′分别是BC和B′C′上的高.求证 $\frac{C_{\triangle BC}}{C_{\triangle 'B'C'}}=k$, $\frac{\triangle BC}{\triangle 'B'C'}=k^2$.



证明:∵△ABC∽△A′B′C′,相似比为k,

$\therefore \frac{B}{'}=\frac{C}{'}=\frac{BC}{'}=k, \frac{D}{'}=k,$

$\therefore AB=kA'B', AC=kA'C', BC=kB'C'.$

$\therefore \frac{C_{\triangle BC}}{C_{\triangle 'B'C'}}=\frac{B+BC+C}{'+'+'}$

$=\frac{'+'+'}{'+'+'}=k,$

$\frac{\triangle BC}{\triangle 'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot D}{\frac{1}{2}B'C'\cdot 'D'}=\frac{}{'}\cdot\frac{}{'}=K.$

活动三

你能归纳总结相似三角形的性质吗?你能应用这些性质解决哪些问题?

【课件展示】　相似三角形的性质:

(1)相似三角形的对应边成比例;

(2)相似三角形的对应角相等;

(3)相似三角形的对应线段(对应高、对应中线、对应角平分线)的比等于相似比;

(4)相似三角形的周长比等于相似比;

(5)相似三角形的面积比等于相似比的平方.

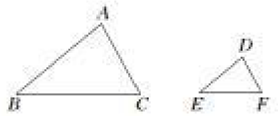
[设计意图] 通过小组合作交流,探究三角形的性质,培养学生的合作意识和严谨的学习态度,同时培养学生的归纳总结能力,证明的过程中利用相似三角形对应高的比等于相似比,既巩固了刚学的知识,又学会了直接使用性质解决问题.

例题讲解

[过渡语] 我们探究了相似三角形的性质,应用这些性质可以直接解决一些有关问题,我们一起尝试解决下列问题.

例 1:(教材例 3)如图所示,在△ABC和△DEF中,AB=2DE,AC=2DF,∠A=∠D.

若△ABC的边BC上的高为6,面积为$12\sqrt{5}$,求△DEF的边EF上的高和面积.



【思考】

(1)由已知AB=2DE,AC=2DF,∠A=∠D,你能得到△ABC和△DEF的关系吗?说明理由.

(2)已知一个三角形一边上的高和面积,如何求解另一个三角形对应边上的高和面积?

【提示】 由两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似可得△ABC和△DEF相似;相似三角形对应高的比等于相似比、面积比等于相似比的平方.

【师生活动】 学生在教师的引导分析下回答问题,然后独立完成解答,小组成员交流答案,小组代表板书过程,教师点评,规范学生书写过程.

解:在△ABC和△DEF中,

∵AB=2DE,AC=2DF,

∴$\frac{DE}{}=\frac{DF}{}=\frac{1}{2}$.

又∠A=∠D,

∴△ABC∽△DEF,△ABC与△DEF的相似比为$\frac{1}{2}$.

∵△ABC的边BC上的高为6,面积为$12\sqrt{5}$,

∴△DEF的边EF上的高为$\frac{1}{2}\times6=3$,面积为$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times12\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

[设计意图] 通过经历对例题的探究过程,加深学生对相似三角形的性质的理解和掌握,达到巩固知识的目的,提高学生应用意识,增强学习数学的自信心,培养学生分析问题、解决问题的能力.

[知识拓展] 相似三角形的性质可用于有关角的计算、线段长的计算以及三

角形的周长和面积的计算等,还可以用于证明两角相等、两条线段相等.

(三) 课堂小结

相似三角形的性质:

(1)相似三角形的对应边成比例;

(2)相似三角形的对应角相等;

(3)相似三角形的对应线段(对应高、对应中线、对应角平分线)的比等于相似比;

(4)相似三角形的周长比等于相似比;

(5)相似三角形的面积比等于相似比的平方.

(四) 检测反馈

1如果两个相似三角形对应边之比是 1∶4,那么它们的对应中线之比是( )

A.1∶2　B.1∶4　C.1∶8　D.1∶16

解析:因为相似三角形的对应中线之比等于相似比,而相似比为相似三角形对应边的比,所以对应中线之比等于 1∶4.故选 B.

2若△ABC∽△A'B'C',相似比为 1∶2,则△ABC与△A'B'C'的面积比为( )

A.1∶2　B.2∶1

C.1∶4　D.4∶1

解析:根据相似三角形的面积比等于相似比的平方,得△ABC与△A'B'C'的面积的比为 1∶4.故选 C.

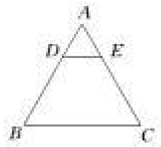
3 若两个相似三角形的面积比为1∶2,则它们的相似比为________;若两个相似三角形的周长比为3∶2,则这两个相似三角形的相似比为________.

解析:由相似三角形的面积比等于相似比的平方,得它们的相似比为 1∶$\sqrt{2}$,

即$\sqrt{\ }$2∶2;由相似三角形的周长比等于相似比,得它们的相似比为 3∶2.

答案:$\sqrt{2}$∶2　3∶2

4　如图所示,在等边三角形ABC中,点D,E分别在AB,AC边上,且DE//BC,如果BC=6 cm,$\frac{D}{\ }=\frac{1}{3}$,那么△ADE的周长等于________cm,△ADE与四边形BCED的面积比为________.



解析:∵DE//BC,∴△ADE∽△ABC,∴两个三角形的周长比等于相似比,面积　比等于相似比的平方 ,∵等边三角形ABC中,BC=6 cm,∴△ABC的周长为 18 cm,∵$\frac{D}{\ }=\frac{1}{3}$,∴△ADE的周长等于 6 cm.两三角形的面积比等于 1∶9.

答案:6　1∶8.

5　若两个相似三角形对应高的比为 2∶3,它们周长的差是 25,求较大三角形的周长及两个三角形的面积比.

解:设较大三角形的周长是 3x,较小三角形的周长是 2x,

则 3x-2x=25,解得x=25,

那么较大三角形的周长是 3x=75,

根据相似三角形面积的比等于相似比的平方,得这两个三角形的面积比为　4∶9.

(五)　板书设计

27.2.2 相似三角形的性质1.

相似三角形的对应线段的比与相似比之间的关系2.

相似三角形的周长比、面积比与相似比的关系

3.例题讲解

例题

(六) 布置作业

1. 教材作业

【必做题】

教材第 42 页习题 27.2 第 6 题.

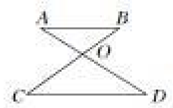
【选做题】

教材第 43 页习题 27.2 第 12 题.

2. 课后作业

【基础巩固】

1 如图所示,AB∥CD,$\frac{AO}{DO}=\frac{2}{3}$,则△AOB的周长与△DOC的周长比是 ( )



A.$\frac{2}{5}$ B.$\frac{3}{2}$

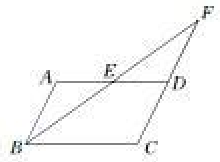
C.$\frac{4}{9}$ D.$\frac{2}{3}$

2 若两个相似三角形面积的比为 1∶5,则它们的相似比为 ( )

A.1∶25 B.1∶5 C.1∶2.5 D.1∶$\sqrt{5}$

3 如图所示,在▱ABCD中,E是AD边上的中点,连接BE,并延长BE交CD的延长线于点F,则△EDF与△BCF的周长之比是 ( )

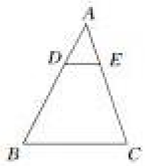
A.1∶2 B.1∶3 C.1∶4 D.1∶5



4.(2015·南京中考)如图所示,在△ABC中,DE∥BC,$\frac{D}{}=\frac{1}{2}$,则下列结论中正确的是 (　　)

A. —$=\frac{1}{2}$　　B. __ $=\frac{1}{2}$

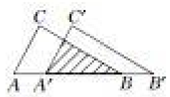
C. $\frac{\triangle DE的周长}{\triangle BC的周长}=\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\triangle DE的面积}{\triangle BC的面积}=\frac{1}{3}$



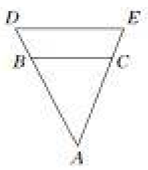
5.△ABC∽△A'B'C',且相似比是 3∶4,△ABC的面积是 27 cm^2,则△A'B'C'的面积为________cm^2.

6.(2015·重庆中考)已知△ABC∽△DEF,若△ABC与△DEF的相似比为 2∶3,则△ABC与△DEF对应边上的中线的比为____________.

7. 如图所示,把△ABC沿AB边平移到△A'B'C'的位置,它们的重叠部分(即图中的阴影部分)的面积是△ABC的面积的一半,若AB=$\sqrt{2}$,则此三角形移动的距离AA'=________.



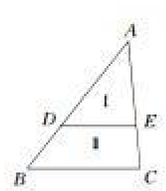
8. 如图所示,若BC∥DE,$\frac{B}{}=\frac{3}{4}$,$S_{\triangle ABC}=4$,求$S_{四边形DBCE}$的值.



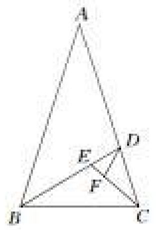
【能力提升】

9　如图所示,平行于BC的直线DE把△ABC分成的两部分面积相等,则

—= ________.

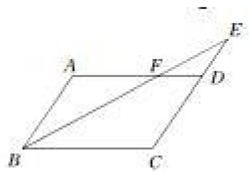


10　在△ABC中,AB=9,AC=12,BC=18,D为AC上一点,AD=4,在AB上取一点E,得到△ADE,若这两个三角形相似,则它们的周长之比是__________.



11　如图所示,顶角为 36°的等腰三角形,其底边与腰之比等于k,这样的三角形叫黄金三角形.已知腰长AB=1,△ABC为第一个黄金三角形,△BCD为第二个黄金三角形,△CDE为第三个黄金三角形,…,以此类推,第 2015 个黄金三角形的周长为______.

12　如图所示,在▱ABCD中,E是CD延长线上的一点,BE与AD交于点F,$DE=\frac{1}{2}CD$



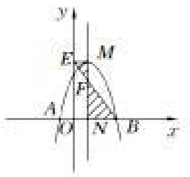
(1)求证△ABF∽△CEB;

(2)若△DEF的面积为 2,求▱ABCD的面积.

【拓展探究】

13　如图所示,抛物线$y=-x^2+2x+c$与x轴交于A,B两点,它的对称轴与x轴交

于点N,过顶点M作ME⊥y轴于点E,连接BE交MN于点F,已知点A的坐标为(-1,0).



(1)求该抛物线的解析式及顶点M的坐标;

(2)求△EMF与△BNF的面积之比.

【答案与解析】

1.D(解析:∵AB//CD,∴△AOB∽△DOC,∴△AOB与△DOC的周长比等于相似比,∵$\frac{O}{}=\frac{2}{3}$,∴△AOB与△DOC的周长比是$\frac{2}{3}$.故选 D.)

2.D(解析:由相似三角形的面积比等于相似比的平方,得它们的相似比是 1∶$\sqrt{5}$.故选 D.)

3.A(解析:∵四边形ABCD是平行四边形,∴AD=BC,AD//BC,∴△EDF∽△BCF,∴△EDF与△BCF的周长之比为$\frac{DE}{}$,∵E是AD边上的中点,∴AD=2DE,∵AD=BC,∴BC=2DE,∴△EDF与△BCF的周长之比为 1∶2.故选 A.)

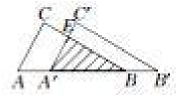
4.C(解析:∵DE//BC,∴△ADE∽△ABC,∴$\frac{D}{}=\frac{E}{}=\frac{DE}{}$,∵$\frac{D}{}=\frac{1}{2}$,∴$\frac{D}{}=\frac{E}{}=\frac{DE}{}=\frac{1}{3}$,故A,B 选项均错误.∵△ADE∽△ABC,∴$\frac{\triangle DE的周长}{\triangle BC的周长}=\frac{D}{}=\frac{1}{3}$,$\frac{\triangle DE的面积}{\triangle BC的面积}=\left(—\right)^2=\frac{1}{9}$,故 C 选项正确,D 选项错误.故选 C.)

5.48(解析:∵△ABC∽△A'B'C',且相似比是 3∶4,∴△ABC与△A'B'C'的面积比为 9∶16.∵△ABC的面积是 27 cm^2,∴△A'B'C'的面积为 48 cm^2.故填 48.)

6.2∶3(解析:∵△ABC∽△DEF,△ABC 与△DEF的相似比为 2∶3, ∴△ABC 与△ DEF对应边上的中线的比是 2∶3.故填 2∶3.)

7.$\sqrt{2}$-1(解析:如图所示,设BC与A'C'交于点E,由平移的性质,知AC//A'C',

∴△BEA'∽△BCA, ∴ $S_{\triangle BEA'}:S_{\triangle BCA}=\left(\frac{A'B}{AB}\right)^2=1:2$, ∵AB=$\sqrt{2}$, ∴A'B=1, ∴AA'=AB−A'B=$\sqrt{2}-1$. 故填 $\sqrt{2}-1$.)



8.解: ∵BC//DE, ∴△ABC∽△ADE, ∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\left(\frac{AB}{AD}\right)^2$, ∵ $\frac{AB}{AD}=\frac{3}{4}$, ∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{9}{16}$, 又∵ $S_{\triangle ABC}=4$, ∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{64}{9}$, ∴ $S_{四边形DBCE}=\frac{28}{9}$.

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$(解析: ∵DE//BC, ∴△ADE∽△ABC. ∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2$. ∵ $S_{\triangle ADE}=S_{四边形BCED}$, ∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$. 即 $\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{1}{2}$, ∴ $\frac{AD}{AB}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故填 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.)

10. $\frac{4}{9}$或$\frac{1}{3}$(解析: 当AD与AB对应时, 相似比为$\frac{4}{9}$, 所以周长比为$\frac{4}{9}$; 当AD与AC对应时, 相似比为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, 所以周长比为$\frac{1}{3}$. 故填$\frac{4}{9}$或$\frac{1}{3}$.)

11. $k^{2014}(2+k)$(解析: ∵AB=AC=1, ∴△ABC的周长为 2+k, △BCD的周长为 $k+k+k^2=k(2+k)$, △CDE的周长为 $k^2+k^2+k^3=k^2(2+k)$, …, 依次类推, 第 2015 个黄金三角形的周长为 $k^{2014}\cdot(2+k)$. 故填 $k^{2014}(2+k)$.)

12. (1)证明: ∵四边形ABCD是平行四边形, ∴∠A=∠C, AB∥CD, ∴∠ABF=∠CEB, ∴△ABF∽△CEB. (2)解: ∵四边形ABCD是平行四边形, ∴AD//BC, AB平行且等于CD, ∴△DEF∽△CEB, △DEF∽△ABF, ∵DE=$\frac{1}{2}$CD, ∴ $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle CEB}}=\left(\frac{DE}{CE}\right)^2=\frac{1}{9}$, $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$, ∵ $S_{\triangle DEF}=2$, ∴ $S_{\triangle CEB}=18$, $S_{\triangle ABF}=8$, ∴ $S_{四边形BCDF}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle DEF}=16$. ∴ $S_{四边形ABCD}=S_{四边形BCDF}+S_{\triangle ABF}=16+8=24$.

13.解: (1)由题意可得 $-(-1)^2+2\times(-1)+c=0$, 解得 $c=3$, ∴ $y=-x^2+2x+3$, ∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, ∴顶点M(1, 4). (2)∵A(−1, 0), 抛物线的对称轴为直线 $x=1$, ∴点B(3, 0), ∴EM=1, BN=2, ∵EM//BN, ∴△EMF∽△BNF, ∴ $\frac{S_{\triangle EMF}}{S_{\triangle BNF}}=\left(\frac{EM}{BN}\right)^2=\frac{1}{4}$.

五、 教学反思

（一） 成功之处

本节课以解决物理知识和生活实际问题导入新课，激发学生探索新知识的兴趣，通过复习全等三角形的性质及相似三角形的判定，在已有知识的基础上用类比化归的思想去探究新知.本节课的重点是探索相似三角形的性质，教学中不是直接给出结论让学生证明，而是在探索活动中，学生在教师提出的层层深入的问题引导下，经历测量、猜想、验证等活动，归纳总结出相似三角形的有关性质，并能应用性质解决问题，课堂上学生积极开展小组合作学习，交流探索新知，并且在不断探索中学会创造性学习，培养学生的探索和创新能力，同时提高数学思考、分析和探究活动能力.

（二） 不足之处

本节课对于证明相似三角形的对应线段的比等于相似比的问题，教学设计时教师引导证明对应高的比等于相似比，剩下两个由学生之间交流，类比说出思路和过程，起到复习巩固的目的.但是由于自己放不开手，怕学生不会，在学生说时一再仔细强调导致最后时间不充分，应该更大胆一些，放开一些，让学生有更大的思维空间，达到“授之以渔”的目的.

（三） 再教设计

本节课通过实际问题创设情景，引入新知，使学生体验到生活中的数学知识，从而调动学生探索新知的兴趣和学习的积极性.在探索性质的过程中，多给学生提供自主学习、自主操作、自主活动的机会，不论是回顾旧知，还是探究新知，都是教师引导，学生自主探索，通过测量、计算，作出猜想，然后分析验证，体现了学生是数学学习的主人的理念.在任何探究环节，教师以引导学生思考、动手操作、合作交流为主，体现教师是数学学习的组织者、引导者和合作者的新理念.