1.2 空间向量基本定理

【学习目标】

课程标准	学科素养
1.理解空间向量的正交分解，空间向量的基本定理， 2.能用空间一个基底表示空间的任意向量.（重点）	1、数学运算 2、数学抽象

【自主学习】

1. 空间向量基本定理

定理：如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面 ，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在有序实数组$\{x，y，z\}$，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 其中$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$叫做空间的一个 基底 ，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都叫做基向量.

2.单位正交基底

空间的一个基底中的三个基向量两两垂直，且长度都为 1，那么这个基底叫做单位正交基底，常用$\{\boldsymbol{i}，\boldsymbol{j}，\boldsymbol{k}\}$，$\boldsymbol{a}$ 可以分解成三个向量，$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，像这样叫做把空间向量进行正交分解。

【小试牛刀】

1.判断正错

(1)空间的任何一个向量都可用三个给定向量表示.（ ）

(2)若$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$为空间的一个基底，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 全不是零向量.（ ）

(3)如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间的一个基底，则一定有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.( )

(4)任何三个不共线的向量都可构成空间的一个基底.（ ）

2．在下列两个命题中，真命题是( )

①若三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不能构成空间的一个基底，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面；

②若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线向量,而 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda，\mu\in\mathbf{R}$ 且$\lambda\mu\neq0)$，则$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$构成空间的一个基底.

A．仅① B．仅② C．①② D．都不是

【经典例题】

题型一 基底的判断

判断标准：判断三个空间向量是否共面，若共面，则不能构成基底；若不共面，则能构成基底.

方法：①如果向量中存在零向量，则不能作为基底；如果存在一个向量可以用另外的向量线性表示，则不能构成基底.

②假设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$，运用空间向量基本定理，建立 λ，μ 的方程组，若有解，则共面，不能作为基底；若无解，则不共面，能作为基底.

例 1 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$，且$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，给出下列向量：①$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\}$；②$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{z}\}$；③$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\}$．其中可以作为空间的基底的有(　　)

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．0 个

[跟踪训练] 1 已知$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的一个基底，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OB}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，试判断$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$能否作为空间的一个基底．

题型二　用基底表示向量

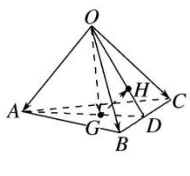
注意：用基底表示向量时，若基底确定，要充分利用向量加法、减法的三角形法则和平行四边形法则，以及向量数乘的运算律；若没给定基底，首先选择基底，选择时，要尽量使所选的基向量能方便地表示其他向量，再就是看基向量的模及其夹角是否已知或易求．

例 2 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$E$，$F$ 分别是 AD_1，BD 的中点．

(1)用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{D_1B}$，$\overrightarrow{EF}$；

(2)若$\overrightarrow{D_1F}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，求实数 x，y，z 的值．

[跟踪训练] 2 如图所示，空间四边形 $OABC$ 中，G，H 分别是△ABC，△OBC 的重心，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$D$ 为 BC 的中点．试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量$\overrightarrow{OG}$和$\overrightarrow{GH}$.



【当堂达标】

1. 以下四个命题中正确的是(　　)

A．基底$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$中可以有零向量

B．空间任何三个不共面的向量都可构成空间向量的一个基底

C．△ABC为直角三角形的充要条件是$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

D．空间向量的基底只能有一组

2. 已知点O，A，B，C为空间不共面的四点，且向量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，向量$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，则与$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不能构成空间基底的向量是(　　)

A.$\overrightarrow{OA}$　　　　B.$\overrightarrow{OB}$

C.$\overrightarrow{OC}$　　　　D.$\overrightarrow{OA}$或$\overrightarrow{OB}$

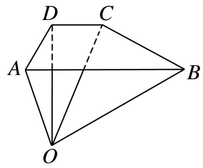
3. 下列能使向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$成为空间的一个基底的关系式是(　　)

A.$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$　　　　B.$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

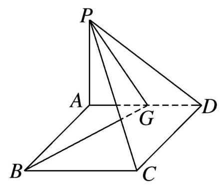
C.$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　　　　D.$\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}-MC$

4．已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，若$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，则$\alpha$，$\beta$，$\lambda$的值分别为________.

5.如图，在梯形$ABCD$中，$AB\,/\!/\,CD$，$AB=2CD$，点O为空间任一点，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则向量$\overrightarrow{OD}$用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$表示为________.



6．如图，已知$PA\perp$平面$ABCD$，四边形$ABCD$为正方形，G为△PDC的重心，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$，试用基底$\{\boldsymbol{i}，\boldsymbol{j}，\boldsymbol{k}\}$表示向量$\overrightarrow{PG}$，$\overrightarrow{BG}$.



【参考答案】

【小试牛刀】

1.×　√　√　×

2.　A　解析　①为真命题；②中，由题意得 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，故②为假命题，故选 A.

【经典例题】

例 1 B　②③均可以作为空间的基底，故选 B.

[跟踪训练] 1 解　假设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$共面．则存在实λ，μ使得$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，

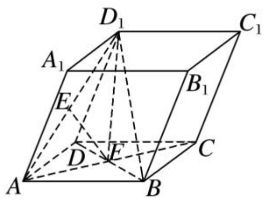
$\therefore \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3=\lambda(-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+\mu(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)=(-3\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2+(2\lambda-\mu)\boldsymbol{e}_3$，

$\because \boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面，

$\therefore \begin{cases}-3\lambda+\mu=1,\\ \lambda+\mu=2,\\ 2\lambda-\mu=-1\end{cases}$　此方程组无解，

$\therefore \overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不共面，$\therefore \{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$可以作为空间的一个基底．

例 2 解　(1)如图，连接 AC，



$\overrightarrow{D_1B}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$.

(2)$\overrightarrow{D_1F}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{D_1B})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{D_1B})=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

$\therefore x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，$z=-1$.

[跟踪训练]　2 解　因为$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}$，而$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$，

又 D 为 BC 的中点，所以$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，所以$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

又因为$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

所以$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

所以$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

【当堂达标】

1. B 解析 使用排除法．因为零向量与任意两个非零向量都共面，故 A 不正确；$\triangle ABC$ 为直角三角形并不一定是$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，可能是$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，也可能是$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，故 C 不正确；空间基底可以有无数多组，故 D 不正确．

2. C 解析 $\because \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\therefore \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}$共面，$\therefore \overrightarrow{OC}$与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不能构成一组空间基底．3. C 解析 对于选项 A，由$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)\Leftrightarrow M$，$A$，$B$，$C$ 四点共面知，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$共面；对于选项 B，D，可知$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$共面，故选 C.

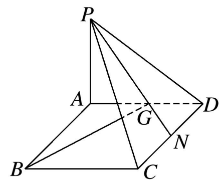
4. 5. $\frac{5}{2}$，-1，$-\frac{1}{2}$ 解析 $\because \boldsymbol{d}=\alpha(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+\beta(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+\lambda(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$

$=(\alpha+\beta+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(\alpha+\beta-\lambda)\boldsymbol{e}_2+(\alpha-\beta+\lambda)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，

$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=1,\\ \alpha+\beta-\lambda=2,\\ \alpha-\beta+\lambda=3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\alpha=\frac{5}{2},\\ \beta=-1,\\ \lambda=-\frac{1}{2}.\end{cases}$ 5. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 解析 $\because \overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$，

$\therefore \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$，$\therefore \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=-2(\overrightarrow{OD}-\boldsymbol{c})$，$\therefore \overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

6.解 延长 PG 交 CD 于点 N，则 N 为 CD 的中点，



$\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})\right]=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$.

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}+\frac{1}{3}\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$.

反盗版维权声明

北京凤凰学易科技有限公司（学科网：www.zxxk.com）郑重发表如下声明：

一、本网站原创内容，由本网站依照运营规划，安排专项经费，组织名校名师创作完成，本公司拥有著作权。

二、本网站刊登的试卷、教案、课件、学案等内容，经著作权人授权，本公司享有独家信息网络传播权。

三、任何个人、企事业单位（含教育网站）或者其他组织，未经本公司许可，不得以复制、发行、表演、广播、信息网络传播、改编、汇编、翻译等任何方式使用本网站任何作品及作品的组成部分。

四、一旦发现侵犯本网站作品著作权的行为，欢迎予以举报。

举报电话：010-58425260。

举报内容对查实侵权行为确有帮助的，一经确认，将给予所获得奖励。

五、我们将联合全国各地文化执法机关和相关司法机构，并结合广大用户和网友的举报，严肃清理侵权盗版行为，依法追究侵权者的民事、行政和刑事责任！

特此声明！

北京凤凰学易科技有限公司